

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ 2026
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

Προτεινόμενες απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελίδα 133

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 51

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 185

A4. α) Λ (σχολικό βιβλίο σελίδα 34)

β) Σ (σχολικό βιβλίο σελίδα 99)

γ) Σ (σχολικό βιβλίο σελίδα 156)

δ) Σ (σχολικό βιβλίο σελίδα 116)

ε) Λ (σχολικό βιβλίο σελίδα 114)

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $D_{f \circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\}$

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2, +\infty) \\ g(x) \in (1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{x-2} + 1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{x-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x > 2 \end{cases}$$

Άρα η συνάρτηση $h = f \circ g$ ορίζεται για $x \in (2, +\infty)$

Ο τύπος της είναι

$$\begin{aligned}
 h(x) &= (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2\ln(g(x)-1) = 2\ln(\sqrt{x-2}+1-1) = 2\ln(\sqrt{x-2}) = \\
 &= 2\ln(x-2)^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln(x-2) = \ln(x-2)
 \end{aligned}$$

B2. Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$h'(x) = [\ln(x-2)]' = \frac{1}{x-2} \cdot (x-2)' = \frac{1}{x-2} > 0 \text{ για κάθε } x \in (2, +\infty)$$

Η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της άρα και 1-1, οπότε ορίζεται η αντίστροφή της συνάρτησης.

$$h(x) = \ln(x-2) \Leftrightarrow y = \ln(x-2) \Leftrightarrow \ln e^y = \ln(x-2) \Leftrightarrow e^y = x-2 \Leftrightarrow x = e^y + 2$$

Από το πεδίο ορισμού της h έχουμε ότι πρέπει $x \in (2, +\infty)$ άρα πρέπει να ισχύει και $e^y + 2 > 0$ το οποίο αληθεύει για κάθε y .

Άρα είναι $x = e^y + 2 \Leftrightarrow h^{-1}(y) = e^y + 2$ και η αντίστροφη συνάρτηση της h είναι η

$$h^{-1}(x) = e^x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

B3. Υπολογίζουμε το $\lim_{x \rightarrow 2} \left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\ln(x-2) \cdot \frac{2\ln(x-1)}{x-2} \right)$

Θέτουμε $u = x-2$ οπότε είναι $u = x-2 \Leftrightarrow x = u+2$ και $u_0 = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$

Το όριο γίνεται $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\ln(x-2) \cdot \frac{2\ln(x-1)}{x-2} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\ln u \cdot \frac{2\ln(u+2-1)}{u} \right) = 2 \lim_{u \rightarrow 0} \left(\ln u \cdot \frac{2\ln(u+1)}{u} \right)$

Είναι $\lim_{u \rightarrow 0} \ln u = -\infty$ και $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(u+1)}{u} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{DLH \ u \rightarrow 0} \frac{[\ln(u+1)]'}{u'} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{u+1} (u+1)'}{1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u+1} = 1$

Τελικά έχουμε $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\ln(x-2) \cdot \frac{2\ln(x-1)}{x-2} \right) = 2 \lim_{u \rightarrow 0} \left(\ln u \cdot \frac{2\ln(u+1)}{u} \right) = -\infty$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η συνάρτηση f έχει οριζόντια εφαπτομένη στο $+\infty$ θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx^3 + \mu x}{x^2 + 1} = l \in \mathbb{R}$$

Αν είναι $k \neq 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx^3 + \mu x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} kx = +\infty \text{ ή } -\infty$

Άρα είναι $k = 0$ και $f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}$

Αφού η $y=x$ εφαπτεται της C_f θα είναι $f'(0) = \lambda_{\epsilon} = 1$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως ρητή παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \left(\frac{\mu x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{(\mu x)' \cdot (x^2 + 1) - (\mu x) \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu \cdot (x^2 + 1) - (\mu x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu x^2 + \mu - 2\mu x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-\mu x^2 + \mu}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{-\mu \cdot 0^2 + \mu}{(0^2 + 1)^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\mu}{1} = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$$

Άρα είναι $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

Γ2. i) Είναι $f'(x) = \frac{-\mu x^2 + \mu}{(x^2 + 1)^2} \stackrel{\mu=1}{=} \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

Λύνουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Λύνουμε $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} > 0 \stackrel{(x^2 + 1)^2 > 0}{\Leftrightarrow} 1 - x^2 > 0$

.X	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f'(x)	-		+		-
f(x)					

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $A_1 = (-\infty, -1]$ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $A_2 = [-1, 1]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_2

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $A_3 = [1, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_3

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ άρα

η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_1 = -1$ το $f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2 + 1} = -\frac{1}{2}$ και ολικό μέγιστο

στο $x_2 = 1$ το $f(1) = \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}$

ii) Αφού η συνάρτηση έχει ολικό ελάχιστο με τιμή $f(-1) = -\frac{1}{2}$ και ολικό μέγιστο με τιμή $f(1) = \frac{1}{2}$

προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το διάστημα $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Για την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ βρίσκουμε για ποιες τιμές του α ισχύει $\frac{1}{2} + \alpha^2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Είναι $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + \alpha^2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \leq \alpha^2 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 \leq \alpha^2 \leq 0$. Η τελευταία σχέση ισχύει μόνο για

$\alpha=0$ οπότε η εξίσωση γίνεται $f(x) = \frac{1}{2}$ η οποία έχει μοναδική ρίζα για $x=1$ όπου και έχουμε το ολικό μέγιστο.

Γ3. i) Είναι $I_v = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx$ οπότε $I_{v+1} = \int_0^1 \frac{x^{2(v+1)+1}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+3}}{x^2+1} dx$

Τότε

$$\begin{aligned}
 I_v + I_{v+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2v+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{2v+1}}{x^2+1} + \frac{x^{2v+3}}{x^2+1} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{2v+1} + x^{2v+3}}{x^2+1} \right) dx = \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{x^{2v+1}(x^2+1)}{x^2+1} \right) dx = \int_0^1 x^{2v} dx = \left[\frac{x^{2v+2}}{2v+2} \right]_0^1 = \frac{1^{2v+2}}{2v+2} - \frac{0^{2v+2}}{2v+2} = \frac{1}{2v+2}
 \end{aligned}$$

ii)

Για $v=0$

$$I_0 + I_{0+1} = \frac{1}{2 \cdot 0 + 2} \Rightarrow I_0 + I_1 = \frac{1}{2}$$

Για $v=1$

$$I_1 + I_{1+1} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 2} \Rightarrow I_1 + I_2 = \frac{1}{4}$$

Είναι $I_0 = \int_0^1 \frac{x^{2 \cdot 0 + 1}}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$. Θέτουμε $u = x^2 + 1$ οπότε είναι $du = (x^2 + 1)' dx = 2x dx$

Για $x_1 = 0$ $u_1 = 0^2 + 1 = 1$ και για $x_2 = 1$ $u_2 = 1^2 + 1 = 2$

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} 2x dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} [\ln u]_1^2 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\text{Τότε } I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln 2 + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 + I_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 + I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = g(x) + x$ η οποία είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη με $x \in [-1, 0]$.

Είναι $h(-1) = g(-1) - 1$ και $h(0) = g(0)$

Αφού ισχύει $0 < g(x) < 1$ τότε για $x = -1$ έχουμε $0 < g(-1) < 1 \Rightarrow g(-1) - 1 < 0 \Rightarrow h(-1) < 0$

Αφού ισχύει $0 < g(x) < 1$ τότε για $x = 0$ έχουμε $0 < g(0) < 1 \Rightarrow 0 < g(0) \Rightarrow h(0) > 0$

Αφού ισχύει $h(-1) \cdot h(0) < 0$ από θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-1, 0)$

τέτοιο ώστε $h(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$.

Είναι $h'(x) = (g(x) + x)' = g'(x) + 1 \neq 0$ και αφού η g' δεν έχει ρίζα και είναι συνεχής θα διατηρεί το πρόσημό της και θα είναι γνησίως μονότονη άρα και 1-1, οπότε η ρίζα της $h(x) = 0$, δηλαδή το x_1 θα είναι μοναδική.

Δ2. Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \cdot (g(x) + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot (g(x) + x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \epsilon\phi x - \kappa x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2\eta\mu x}{x} + \frac{\epsilon\phi x}{x} - \frac{\kappa x}{x} \right) = 3 - \kappa \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon\phi x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right) = 1 \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 0} = 1$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow 0 = 3 - \kappa \Leftrightarrow \kappa = 3$$

Δ3. i) Στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f(x) = 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x$. Είναι $f(0) = 2\eta\mu 0 + \epsilon\phi 0 - 3 \cdot 0 = 0$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x)' = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x + 1 - 3\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Είναι $\sigma\upsilon\nu^2 x > 0$ και θέτοντας $\omega = \sigma\upsilon\nu x$ ο αριθμητής γίνεται

$$\begin{aligned} 2\omega^3 - 3\omega^2 + 1 &= 2\omega^3 - 2\omega^2 - \omega^2 + 1 = 2\omega^2(\omega - 1) + (1 - \omega)(1 + \omega) = \\ &= 2\omega^2(\omega - 1) - (\omega - 1)(1 + \omega) = (\omega - 1)(2\omega^2 - \omega - 1) \end{aligned}$$

Το τριώνυμο έχει ρίζες το 1 και το $-\frac{1}{2}$ άρα τελικά έχουμε

$$2\omega^3 - 3\omega^2 + 1 = (\omega - 1)2(\omega - 1)\left(\omega + \frac{1}{2}\right) = 2(\omega - 1)^2\left(\omega + \frac{1}{2}\right)$$

Τότε είναι $2\sigma\upsilon\nu^3 x + 1 - 3\sigma\upsilon\nu^2 x = 2(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2\left(\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2}\right) > 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ οπότε είναι

$$f'(x) = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x + 1 - 3\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0 \text{ στο } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Τότε για $x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$

ii) Η εξίσωση γίνεται $3f(x) = \pi \Leftrightarrow f(x) = \frac{\pi}{3}$

Αν είναι $A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ τότε αφού η συνάρτηση είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο A θα

είναι $f(A) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = [0, +\infty)$

Είναι $f(0) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) = +\infty$ γιατί $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} 2\eta\mu x = 2$,

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \epsilon\phi x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} 3x = 3 \cdot \frac{\pi}{2}$.

Αφού $\frac{\pi}{3} \in f(A) = [0, +\infty)$ η εξίσωση $f(x) = \frac{\pi}{3}$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο A αφού είναι γνησίως μονότονη άρα και 1-1.

Δ4. i) Για $x \in [x_1, 0]$ είναι $f(x) = x^2 \cdot (g(x) + x)$

Είναι $x^2 \geq 0$ και αν είναι $h(x) = g(x) + x$ με $h(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$. Από το Δ1 έχουμε

ότι η h διατηρεί το πρόσημο της και αφού είναι $h(0) = g(0) > 0$ τότε θα είναι και $h(x) \geq 0$ στο $[x_1, 0]$.

ii) Είναι $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$ από το Δ3ii. Αφού ο άξονας y'γ χωρίζει το χωρίο σε δύο ισεμβαδικά χωρία

θα είναι $\int_{x_1}^0 x^2 \cdot (g(x) + x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) dx$



Είναι

$$\int_{x_1}^0 x^2 \cdot (g(x) + x) dx = \int_{x_1}^0 [x^2 \cdot g(x) + x^3] dx = \int_{x_1}^0 x^2 \cdot g(x) dx + \int_{x_1}^0 x^3 dx = \int_{x_1}^0 x^2 \cdot g(x) dx + \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x_1}^0 = \\ = \int_{x_1}^0 x^2 \cdot g(x) dx + \frac{x_1^4}{4}$$

$$\text{Ακόμα είναι } \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \epsilon\varphi x - 3x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \epsilon\varphi x dx - 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} x dx$$

$$\text{Έχουμε } 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x dx = 2 [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{3}} = -2 \left(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu 0 \right) = -2 \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \epsilon\varphi x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x} dx = - [\ln(\sigma\upsilon\nu x)]_0^{\frac{\pi}{3}} = - \left(\ln \left(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \right) - \ln(\sigma\upsilon\nu 0) \right) = -\ln \frac{1}{2} + \ln 1 = \ln 2$$

$$3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} x dx = 3 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 3 \left[\frac{\left(\frac{\pi}{3} \right)^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] = 3 \frac{\pi^2}{9} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\text{Άρα είναι } \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \epsilon\varphi x - 3x) dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \text{ και τότε}$$

$$\int_{x_1}^0 x^2 \cdot (g(x) + x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \epsilon\varphi x - 3x) dx \Leftrightarrow \int_{x_1}^0 x^2 \cdot g(x) dx + \frac{x_1^4}{4} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_{x_1}^0 x^2 \cdot g(x) dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} - \frac{x_1^4}{4} \quad (1)$$

Τότε έχουμε

$$\int_{x_1}^0 x^3 \cdot g'(x) dx = \left[x^3 \cdot g(x) \right]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 (x^3)' \cdot g(x) dx = 0^3 \cdot g(0) - x_1^3 \cdot g(x_1) - \int_{x_1}^0 3x^2 \cdot g(x) dx$$

Από το Δ1 είναι $h(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0 \Leftrightarrow g(x_1) = -x_1$

Άρα είναι

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^0 x^3 \cdot g'(x) dx &= -x_1^3 \cdot (-x_1) - \int_{x_1}^0 3x^2 \cdot g(x) dx = x_1^4 - 3 \int_{x_1}^0 x^2 \cdot g(x) dx \stackrel{(1)}{=} x_1^4 - 3 \left(1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} - \frac{x_1^4}{4} \right) = \\ &= x_1^4 - 3 - 3 \ln 2 + \frac{\pi^2}{2} - 3 \frac{x_1^4}{4} = \frac{x_1^4}{4} - 3 - 3 \ln 2 + \frac{\pi^2}{2} - 3 \end{aligned}$$

Ευχόμαστε καλή συνέχεια και καλά αποτελέσματα!!!