ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Φροντιστήρια Ρούλα Μακρή | Τομέας Μαθηματικών
Υπεύθυνος τομέα: Φάνης Μαργαρώνης
Συνεργάστηκαν: Μαργαρίτα Πιπεράκη
Φαίη Οικονομοπούλου
Παναγιώτης Ατζέμης

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία – Θεώρημα σελ. 145 σχολικού βιβλίου

Α2. Θεωρία – Ορισμός σελ. 15 σχολικού βιβλίου

Α3. Παράγωγος της f μπορεί να είναι η Τ.
Παράγωγος της g μπορεί να είναι η Η.

Α4. α) Ψευδής
β) Αντιπαράδειγμα – σελ. 62 σχολικού βιβλίου.

Α4. α) ΣΩΣΤΟ
β) ΣΩΣΤΟ
γ) ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Εφόσον η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, θα είναι και στο $x_o = 1$.

Επομένως θα ισχύει: $\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x} = 1 + \alpha \Leftrightarrow 2 = 1 + \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$.

Πράγματι, για $\alpha = 1$ η f είναι συνεχής στο $x_o = 1$ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$ αλλά και στα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$.

Έτσι έχουμε: $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + 1, & x \leq 1 \end{cases}$.

Β2. Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ με $f'(x) = 2x$ και στο $(1, 4]$, με

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Εξετάζουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$.

- $\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} (x+1) = 2$ και
- $\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{x+1}{x} - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x + 1 - 2x}{x(x-1)} \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{-1}{x}\right) = -1 \neq 2$.

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$ κι έτσι δεν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

Β3. Αναζητούμε τα σημεία όπου ισχύει: $f'(x) = -\frac{1}{4}$.

Η παράγωγος της f είναι: $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & x > 1 \\ 2x, & x < 1 \end{cases}$.

Για $x>1$ έχουμε:

$f'(x)=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow -\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x^2=4$

$\Leftrightarrow x=2$, δεκτή ή $x=-2<1$, απορρίπτεται.

Είναι $f(2)=\frac{3}{2}$ και $f'(2)=-\frac{1}{4}$, οπότε η εφαπτομένη στο σημείο $A\left(2,\frac{3}{2}\right)$ είναι η :

$(\varepsilon_1):\ y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}(x-2)\Leftrightarrow 4y-6=-x+2\Leftrightarrow x+4y=8$.

Για $x<1$ έχουμε:

$f'(x)=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow 2x=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{8}$, δεκτή.

Είναι $f\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{65}{64}$ και η εφαπτομένη στο σημείο $B\left(-\frac{1}{8},\frac{65}{64}\right)$ είναι η :

$(\varepsilon_2):\ y-f\left(-\frac{1}{8}\right)=f'\left(-\frac{1}{8}\right)\left(x+\frac{1}{8}\right)\Leftrightarrow y-\frac{65}{64}=-\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{8}\right)$

$\Leftrightarrow 64y-65=-16x-2\Leftrightarrow 16x+64y=63$.

B4. • Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε δεν παρουσιάζει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

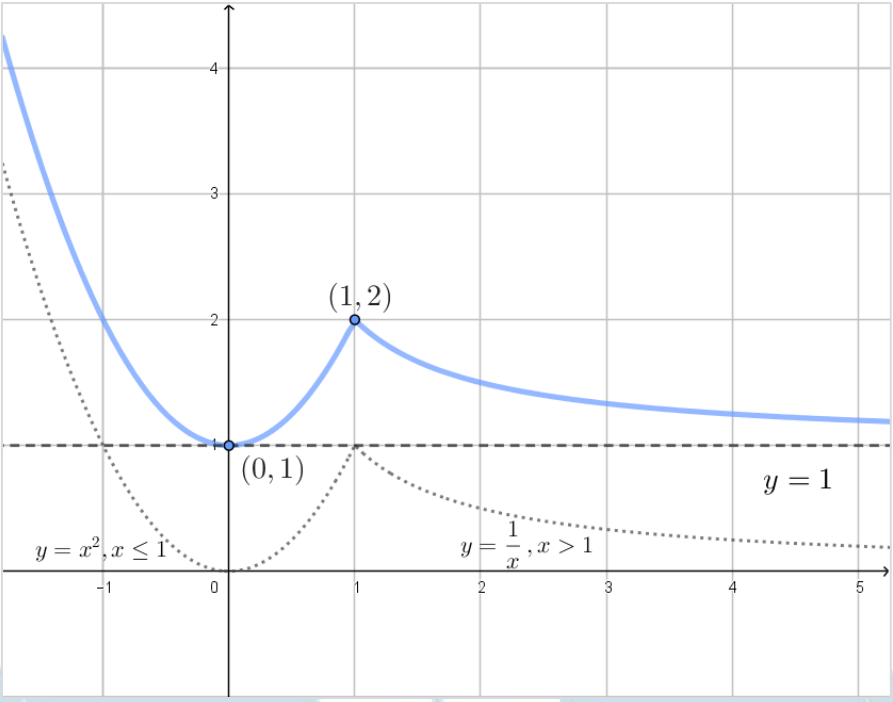
• Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$, άρα η f παρουσιάζει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y=1$.

• Στο $-\infty$ η f δεν έχει ασύμπτωτες, επειδή είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού.

Θεωρούμε τους κλάδους της f γνωστές συναρτήσεις και με μετατοπίσεις :

- της $y=x^2$ κατά μία μονάδα προς τα πάνω στο $(-\infty,1]$
- της $y=\frac{1}{x}$ κατά μία μονάδα προς τα πάνω στο $(1,+\infty)$,

καταλήγουμε στην εξής γραφική παράσταση:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

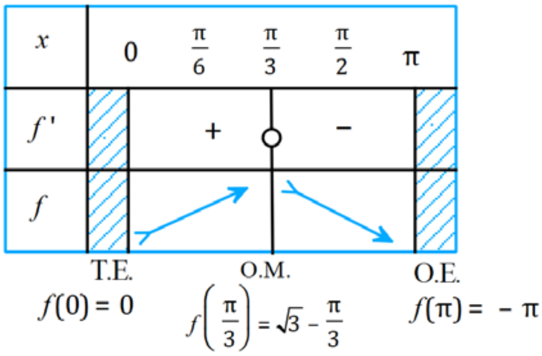
Είναι $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - 1$, συνεχής στο $[0,\pi]$, ενώ η εξίσωση

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \overset{x\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} x = \frac{\pi}{3}$$ (μοναδική ρίζα) .

Είναι, επίσης, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1 > 0$ και f' συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$, άρα από συνέπειες θεωρήματος Bolzano θα είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left[0,\frac{\pi}{3}\right)$.

Αντίστοιχα είναι $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cdot 0 - 1 = -1 < 0$ και f' συνεχής στο $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right]$, άρα από συνέπειες θεωρήματος Bolzano θα είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{3},\pi\right]$.

Έτσι προκύπτει ο πίνακας:



Συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει:

- Ολικό μέγιστο για $x = \dfrac{\pi}{3}$, το $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}$.
- Ολικό ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0) = 0$.
- Τοπικό ελάχιστο για $x = \pi$, το $f(\pi) = -\pi$.

Γ2. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $f''(x) = -2ημx < 0$ για κάθε $x \in (0,\pi)$ και f συνεχής στο $[0,\pi]$. Επομένως η f είναι κοίλη στο $[0,\pi]$. Άρα θα βρίσκεται κάτω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της, με εξαίρεση το σημείο επαφής. Έτσι για οποιοδήποτε $x_o \in [0,\pi]$ η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$ θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το σημείο επαφής.

Γ3. **α' τρόπος**

Είναι: $I = \int_0^{\pi} f(x)\cdot συνx dx = \int_0^{\pi} f(x)\cdot(ημx)' dx = [f(x)\cdot ημx]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)\cdot ημx dx$.

Έχουμε:

$$[f(x)\cdot ημx]_0^{\pi} = f(\pi)\cdot ημ\pi - f(0)\cdot ημ0 = 0$$

Και :

$$\int_0^{\pi} f'(x)\cdot ημx dx = \int_0^{\pi}(2συνx - 1)\cdot ημx dx = \int_0^{\pi} 2συνx\cdot ημx dx - \int_0^{\pi} ημx dx$$

$$= \int_0^{\pi} ημ(2x) dx + [συνx]_0^{\pi} = \left[-\frac{συν(2x)}{2}\right]_0^{\pi} + συν\pi - συν0$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 = -2.$$

Έτσι το ζητούμενο ολοκλήρωμα θα είναι: $I = 0 - (-2) = 2$.

β’ τρόπος

Είναι:

$$I=\int_0^{\pi} f(x)\cdot συνx dx=\int_0^{\pi}(2ημx-x)\cdot συνx dx=\int_0^{\pi}2ημx\cdot συνx dx-\int_0^{\pi}x\cdot συνx dx$$

$$=\left[-\frac{συν(2x)}{2}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}x\cdot(ημx)'dx=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-[x\cdot ημx]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}ημx dx$$

$$=-0+0+[-συνx]_0^{\pi}=-(-1)+1=2.$$

γ’ τρόπος (υπολογισμός του $\int_0^{\pi}ημx\cdot συνx dx$ χωρίς χρήση του τύπου $2ημx\cdot συνx=ημ(2x)$)

Είναι: $\int_0^{\pi}2ημx\cdot συνx dx=2\int_0^{\pi}ημx\cdot συνx dx=2\int_0^{\pi}ημx\cdot(ημx)'dx=2\cdot\int_0^{\pi}\left(\frac{ημ^2x}{2}\right)'dx$

$$=\left[ημ^2x\right]_0^{\pi}=ημ^2\pi-ημ^2 0=0-0=0 .$$

δ’ τρόπος (υπολογισμός του $\int_0^{\pi}ημx\cdot συνx dx$ με αλλαγή μεταβλητής)

Είναι: $\int_0^{\pi}2ημx\cdot συνx dx=2\int_0^{\pi}ημx\cdot συνx dx=2\int_0^{\pi}ημx\cdot(ημx)'dx$

Θέτουμε: $u=ημx$, άρα $du=συνx\, dx$.

Για $x=0$ είναι $u=0$, ενώ για $x=\pi$ είναι $u=0$

Άρα το ολοκλήρωμα γίνεται: $2\int_0^{\pi}u du=0$.

Γ4. **α)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2ημx-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\frac{ημx}{x}-1\right)=2\cdot 1-1=1$.

β) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(f(x)-f(2x)\right)\cdot\ln x\right]\overset{x>0}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(\frac{f(x)}{x}-\frac{f(2x)}{2x}\cdot 2\right)\cdot x\ln x\right]$

$$=(1-1\cdot 2)\cdot 0=0,$$

επειδή:

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$, από (α) ερώτημα.
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)}{2x}\overset{u=2x}{=}\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=1$.

- $$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0^+}(-x)=0\ .$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αρκεί να αποδείξω ότι: $\ln(x+1)>\frac{x}{x+1}$ για κάθε $x>0$.

α' τρόπος

Ισχύει $\ln x\le x-1$ για κάθε $x>0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Θέτω $x=\frac{1}{u+1}>0$, άρα πρέπει $u>-1$, ενώ η ισότητα ισχύει μόνο για $u=0$.

Τότε για $u>-1$ και με το = να ισχύει μόνο για $u=0$, έχουμε:

$$\ln\frac{1}{u+1}\le\frac{1}{u+1}-1\Leftrightarrow-\ln(u+1)\le\frac{-u}{u+1}\Leftrightarrow\ln(u+1)\ge\frac{u}{u+1}$$

Επομένως για κάθε $u>0$ θα ισχύει: $\ln(u+1)>\frac{u}{u+1}$, το οποίο είναι το ζητούμενο.

β' τρόπος

Θέτω στη ζητούμενη σχέση όπου $x+1=u\Leftrightarrow x=u-1$.

Έτσι αρκεί να αποδείξω ότι $\ln u>\frac{u-1}{u}$, για κάθε $u>1$.

Ισοδύναμα, αρκεί: $\ln u>1-\frac{1}{u}\Leftrightarrow\ln u+\frac{1}{u}>0$, για κάθε $u>1$.

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(u)=\ln u+\frac{1}{u}$, $u>1$.

Αρκεί να δείξω ότι ισχύει $g(u)>1$, για κάθε $u>1$.

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$, με $g'(u)=\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}=\frac{u-1}{u^2}>0$, για κάθε $u>1$. Επομένως η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Συμπεραίνουμε ότι θα έχει πεδίο τιμών:

$$g\big((1,+\infty)\big) \overset{g\nearrow}{=} \left(\lim_{x\to 1^+} g(u), \lim_{x\to +\infty} g(u)\right) = (1,+\infty)$$, αφού:

$$\lim_{x\to 1^+} g(u) = \lim_{x\to 1^+}\left(\ln u + \frac{1}{u}\right) = 0+1 = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to +\infty} g(u) = \lim_{x\to +\infty}\left(\ln u + \frac{1}{u}\right) \overset{+\infty+0}{=} +\infty .$$

Οπότε, πράγματι, θα ισχύει $g(u) > 1$, για κάθε $u > 1$.

Δ2. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $A = (0,+\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Είναι $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x+1}\cdot x - \ln(x+1)}{x^2} < 0$, λόγω του Δ1 ερωτήματος.

Οπότε η f θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$, άρα και 1-1 και έτσι θα αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το πεδίο τιμών της f.
Όμως αφού η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, θα ισχύει:

$$f(A) = f\big((0,+\infty)\big) \overset{f\searrow}{=} \left(\lim_{x\to +\infty} f(x), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) = (0,1)$$, επειδή:

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$ και
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x+1)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x+1} = 1.$

Δ3. Αρκεί: $f(x) > 2^{f(x)} - 1 \Leftrightarrow f(x)+1 > 2^{f(x)} \Leftrightarrow \ln\big(f(x)+1\big) > f(x)\ln 2$

$$\overset{0<f(x)<1}{\Leftrightarrow} \frac{\ln\big(f(x)+1\big)}{f(x)} > \ln 2 \Leftrightarrow f\big(f(x)\big) > f(1) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x) < 1$$, που ισχύει.

Δ4. Έχουμε:

$$\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2} + \frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2)f(\alpha) + x(x-1)f^{-1}(\alpha) + (x-1)(x-2)\eta\mu(\pi\alpha) = 0 \quad (1)$$

Έστω, λοιπόν, συνάρτηση $h(x) = x(x-2)f(\alpha) + x(x-1)f^{-1}(\alpha) + (x-1)(x-2)\eta\mu(\pi\alpha)$, ορισμένη στα διαστήματα $[0,1]$ και $[1,2]$, σε καθένα από τα οποία είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Τότε η $(1) \Leftrightarrow h(x)=0$.

Παρατηρούμε ότι:

- $h(0)=2\cdot \eta\mu(\pi\alpha)>0$, επειδή $0<\alpha<1 \overset{\cdot\pi>0}{\Leftrightarrow} 0<\alpha\pi<\pi$, άρα $\eta\mu(\alpha\pi)>0$.
- $h(1)=-f(\alpha)<0$, επειδή $f(A)=(0,1)$.

Επομένως από το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0,1)$, τέτοιο, ώστε να ισχύει: $h(x_1)=0$ και άρα το x_1 θα είναι ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

Αντίστοιχα έχουμε:

- $h(1)=-f(\alpha)<0$
- $h(2)=2f^{-1}(\alpha)>0$, αφού πεδίο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της f, θα ισχύει $f^{-1}(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$.

Οπότε από το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $h(x_2)=0$ και άρα το x_2 θα είναι ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

Επομένως η $h(x)$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες, ενώ είναι πολυώνυμο το πολύ 2ου βαθμού, επομένως θα έχει το πολύ δύο ρίζες. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι θα έχει ακριβώς δύο ρίζες. Επομένως και η αρχική εξίσωση θα έχει ακριβώς δύο ρίζες, μία στο διάστημα $(0,1)$ και μία στο $(1,2)$.

Δ5. Η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $[1,e]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,e)$, επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.

Έτσι θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε: $F'(\xi)=f(\xi)=\dfrac{F(e)-F(1)}{e-1}$ (1) .

Επίσης είναι $F'(x)=f(x)$ και $F''(x)=f'(x)<0$ (από Δ2 ερώτημα).

Επειδή η F' είναι συνεχής, θα έχουμε ότι η F' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.
Οπότε ισχύουν:

$$1<\xi<e \overset{F'\searrow}{\Leftrightarrow} F'(e)<F'(\xi)<F'(1) \Leftrightarrow f(e)<f(\xi)<f(1) \Leftrightarrow \frac{\ln(e+1)}{e}<\frac{F(e)-F(1)}{e-1}<\ln 2 \quad (2).$$

Τότε από τη (2): $\dfrac{F(e)-F(1)}{e-1}<\ln 2 \overset{F(e)=e\ln 2}{\Leftrightarrow} (e-1)\cdot\ln 2>e\cdot\ln 2-F(1) \Leftrightarrow \ln 2<F(1)$.

Μένει να δείξουμε ότι $F(1) < \ln\left(\dfrac{2^{e+1}}{e+1}\right)$.

Από τη (2) έχουμε:

$$\frac{\ln(e+1)}{e} < \frac{F(e)-F(1)}{e-1} \overset{\cdot e(e-1)>0}{\Leftrightarrow} (e-1)\cdot\ln(e+1) < e\big(F(e)-F(1)\big)$$

$$\overset{F(e)=e\ln 2}{\Leftrightarrow} (e-1)\cdot\ln(e+1) < e^2\cdot\ln 2 - eF(1) \Leftrightarrow F(1) < e\ln 2 - \frac{e-1}{e}\cdot\ln(e+1)\ .$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι: $e\ln 2 - \dfrac{e-1}{e}\cdot\ln(e+1) < \ln\left(\dfrac{2^{e+1}}{e+1}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e\ln 2 - \frac{e-1}{e}\cdot\ln(e+1) < (e+1)\cdot\ln 2 - \ln(e+1)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{e-1}{e}\cdot\ln(e+1) < \ln 2 - \ln(e+1)$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{e-1}{e}\right)\cdot\ln(e+1) < \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \left(1-1+\frac{1}{e}\right)\cdot\ln(e+1) < \ln 2$$

$\Leftrightarrow \ln(e+1) < \ln 2^e \Leftrightarrow e+1 < 2^e$, που ισχύει.

β' τρόπος για την απόδειξη της $F(1) < \ln\left(\dfrac{2^{e+1}}{e+1}\right)$

Θα δείξουμε ότι: $F(1) < \ln\left(\dfrac{2^{e+1}}{e+1}\right) \Leftrightarrow F(1) < (e+1)\ln 2 - \ln(e+1)$

$$\Leftrightarrow F(1) < e\cdot\ln 2 + \ln 2 - \ln(e+1)$$

$$\Leftrightarrow F(1) < F(e) + \ln 2 - \ln(e+1)$$

$$\Leftrightarrow F(1) - 1\cdot f(1) < F(e) - e\cdot f(e).$$

Θεωρώ συνάρτηση $w(x) = F(x) - x\cdot f(x)$, $x>0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα είναι και συνεχής στο $(0,+\infty)$. Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι $w(1) < w(e)$.

Είναι: $w'(x) = f(x) - f(x) - x\cdot f'(x) = -x\cdot f'(x) > 0$, αφού $f'(x)<0$ από Δ2 ερώτημα. Έτσι συμπεραίνουμε ότι η w είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $(0,+\infty)$. Οπότε: $1<e \overset{w\nearrow}{\Leftrightarrow} w(1)<w(e)$.

Σημειώσεις των καθηγητών:

1. Στο **Α4** θα μπορούσαμε, αντί του παραδείγματος που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο, να παρουσιάσουμε οποιοδήποτε άλλο ζεύγος συναρτήσεων ή ακόμα και παρόμοιες συναρτήσεις με αυτές του σχολικού βιβλίου, αρκεί να λειτουργούν ως αντιπαράδειγμα του ισχυρισμού. Φερ' ειπείν για τις συναρτήσεις:

$f(x)=\frac{1}{x^4}$ και $g(x)=-\frac{1}{x^4}+2018$, έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$,

ενώ $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}+2018\right)=\lim\limits_{x\to 0}2018=2018$.

2. Στο **Β1** , για να βρούμε το α, θα μπορούσαμε να πάρουμε την ισότητα $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

3. Στο **Β2** θα μπορούσαμε να μην αναφέρουμε τη συνέχεια. Εφόσον η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\left[\frac{1}{2},4\right]$ δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, παρόλο που είναι συνεχής. Εμείς ακολουθήσαμε την αναμενόμενη σειρά ενεργειών του υποψηφίου. Στο ίδιο ερώτημα, αντίστοιχα, δε χρειάζεται να συνεχίσουμε εξετάζοντας αν ισχύει η ισότητα $f\left(\frac{1}{2}\right)=f(4)$, η οποία βέβαια ισχύει.

4. Στο **Β4** θα μπορούσαμε να πάρουμε αναλυτικά το θεώρημα με τα δύο όρια για την εύρεση της ασύμπτωτης στο $+\infty$, όμως η παρατήρηση ότι $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$ μας επιτρέπει να τη βρούμε πιο γρήγορα. Ομοίως και για το -∞, όμως η θεωρία (1ο σχόλιο, σελ. 163 σχολικού βιβλίου) εξασφαλίζει ότι η f δεν θα έχει ασύμπτωτες στο -∞.

5. Στο **Β4,** προκειμένου να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της f, θα μπορούσαμε να πάρουμε την f'' για εύρεση της κυρτότητας της f, να βρούμε τα ακρότατα μέσω της f', καθώς και τα σημεία τομής με τους άξονες. Αλλά με δεδομένο ότι οι συναρτήσεις είναι γνωστές από τη θεωρία δεν κρίνεται σκόπιμο.

6. Στο **Δ1** , στον β’ τρόπο, η ανισότητα $\ln u > 1 - \frac{1}{u}$ για $u > 1$, μπορεί να αποδειχτεί χωρίς βοηθητική συνάρτηση, ακολουθώντας τη λογική του α’ τρόπου, δηλαδή θέτωντας $x = \frac{1}{u}$, με $u > 0$ και το = να ισχύει μόνο για $u = 1$, άρα τελικά για κάθε $u > 1$ θα είναι : $\ln\frac{1}{u} < \frac{1}{u} - 1 \Leftrightarrow -\ln u < \frac{1}{u} - 1 \Leftrightarrow \ln u > 1 - \frac{1}{u}$.

7. Στο **Δ4** το πολυώνυμο $h(x)$ είναι σίγουρα 2ου βαθμού, αφού γράφεται στη μορφή:

$$h(x) = \left(f(\alpha) + f^{-1}(\alpha) + \eta\mu(\pi\alpha)\right) \cdot x^2 - \left(2f(\alpha) + f^{-1}(\alpha) + 3\eta\mu(\pi\alpha)\right) \cdot x + 2\eta\mu(\pi\alpha) ,$$

με συντελεστή του x^2 το: $f(\alpha) + f^{-1}(\alpha) + \eta\mu(\pi\alpha) > 0$, ως άθροισμα θετικών όρων. Παρ’ όλα αυτά δε χρειάζεται να γραφτεί, καθώς η $h(x)$ είναι σίγουρα πολυώνυμο το πολύ 2ου βαθμού, επομένως δεν μπορεί να έχει περισσότερες από 2 ρίζες.