# ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
# ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018
# ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
# ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
# Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

*Φάνης Μαργαρώνης*
*Φροντιστήρια Ρούλα Μακρή | Τομέας μαθηματικών*

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** *(Θεωρία - σελ. 99 σχολικού βιβλίου)*

Έστω συνάρτηση $f$ που είναι παραγωγίσιμη σ’ ένα σημείο $x_0$.

Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0),$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$

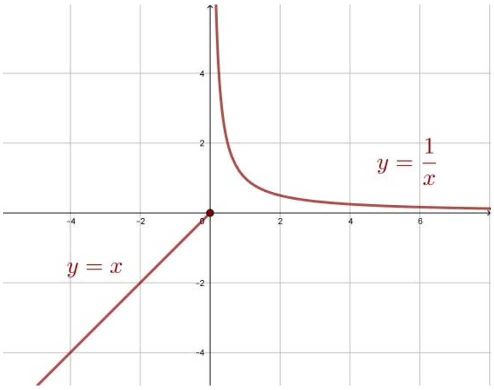
$$=f'(x_0)\cdot 0=0,$$

αφού η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$. Επομένως, $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$.

**Α2.** α) Ψευδής

β) *(Αντιπαράδειγμα σελ. 35 σχολ. βιβλίου)*:

Η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x & , \quad x\leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & , \quad x>0 \end{cases}$ είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη, αφού είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.




***Σημείωση:***
*Ι. Το συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα βρίσκεται μέσα στο σχολικό βιβλίο, επομένως δεν ήταν υποχρεωτική η απόδειξη του ισχυρισμού μας. Αν κάναμε χρήση άλλης συνάρτησης, για την οποία δεν αποδεικνύεται το ψευδές του ισχυρισμού της εκφώνησης στο σχολικό βιβλίο, θα χρειαζόταν απόδειξη. Επίσης η παράθεση ενός κατάλληλου γραφήματος χωρίς απόδειξη δεν είναι αρκετή.*

*ΙΙ. Συναντήσαμε ως απάντηση το λάθος αντιπαράδειγμα της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x}$, η οποία δεν είναι γνησίως μονότονη, ενώ είναι 1-1, όμως πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{R}^*$ και όχι το $\mathbb{R}$, επομένως η επιλογή της δεν αποτελεί κατάλληλο αντιπαράδειγμα.*

**Α3.** *(Θεωρία , σελίδα 216 σχολικού βιβλίου)*

**Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού**

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ’ ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta)-G(\alpha)$.

**Α4.** α) ΛΑΘΟΣ

β) ΛΑΘΟΣ

γ) ΣΩΣΤΟ

δ) ΣΩΣΤΟ

ε) ΣΩΣΤΟ

***Σημείωση:*** *Οι αιτιολογήσεις για το Α4 –οι οποίες όμως δεν χρειαζόταν να γραφτούν – προκύπτουν από τα εξής:*

*α)* *Σελ. 33 σχολικού βιβλίο. Η συνάρτηση $f(x)=ημx$ παρουσιάζει μέγιστο το $y=1$ σε κάθε μία από τις λύσεις της εξίσωσης $f(x)=1$ , δηλαδή στα σημεία* $x=2κπ+\frac{π}{2}$ , $κ\in\mathbb{Z}$.

*β)* *Σελ. 136 σχολικού βιβλίου, στο ΣΧΟΛΙΟ αναφέρεται ότι το αντίστροφο του αντίστοιχου θεωρήματος ΔΕΝ ισχύει.*

*γ)* *Σελ. 53 σχολικού βιβλίου αναφέρεται:* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{συνx-1}{x}=0$*, από το οποίο προκύπτει* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-συνx}{x}=0$.

*δ)* *Σελ. 37 σχολικού βιβλίου.*

*ε)* *Σελ. 17 σχολικού βιβλίου.*

# ΘΕΜΑ Β

Η συνάρτηση $f(x)=x-\frac{4}{x^2}$ έχει πεδίο ορισμού $A=\mathbb{R}-\{0\}$.

Επίσης είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο A, ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

**B1.** Θα είναι:

$f'(x)=\left(x-\frac{4}{x^2}\right)'=1+\frac{4\cdot 2x}{x^4}=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3}=\frac{(x+2)(x^2+2x+4)}{x^3}$, για κάθε $x\neq 0$.

Λύνουμε: $f'(x)=0\Leftrightarrow (x+2)(x^2+2x+4)=0\Leftrightarrow x=-2$

Και $f'(x)>0\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x^2+2x+4)}{x^3}>0\Leftrightarrow x^3(x+2)(x^2+2x+4)>0$

$\Leftrightarrow x^3(x+2)>0\Leftrightarrow x<-2$ ή $x>0$

Το πρόσημο της παραγώγου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | | ↘ | ‖ | ↗ | |

Τ.Μ.
$f(-2) = -3$

Επομένως η f :

- είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-2]$,
- είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,0)$,
- είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.
- παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-2)=-3$.

**B2.** Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο A, με :

$$f''(x)=\left(1+\frac{8}{x^3}\right)'=-\frac{8}{x^6}\cdot 3x^2=-\frac{24}{x^4}<0,\text{ για κάθε } x\neq 0.$$

Επομένως η f :

- είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,0)$
- είναι κοίλη στο διάστημα $(0,+\infty)$
- δεν έχει σημεία καμπής.

**B3.** <u>Κατακόρυφες ασύμπτωτες:</u>

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$ , αφού $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4}{x^2}\overset{4\cdot\frac{1}{0^+}}{=}+\infty$.

Επομένως η ευθεία $x=0$ (ο άξονας y’y) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Η f είναι συνεχής σε κάθε $x_o\neq 0$, σημείο του πεδίου ορισμού της, επομένως δεν έχει άλλη κατακόρυφη ασύμπτωτη.

***Σημείωση:*** *Εδώ συμπεραίνουμε ότι ισχύει* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$*, το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στη σχεδίαση της γραφικής παράστασης, στο ερώτημα Β4.*

<u>Πλάγιες / οριζόντιες ασύμπτωτες:</u>

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)=1, \text{ αφού } \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^3}\overset{\frac{4}{-\infty}}{=}0.$$

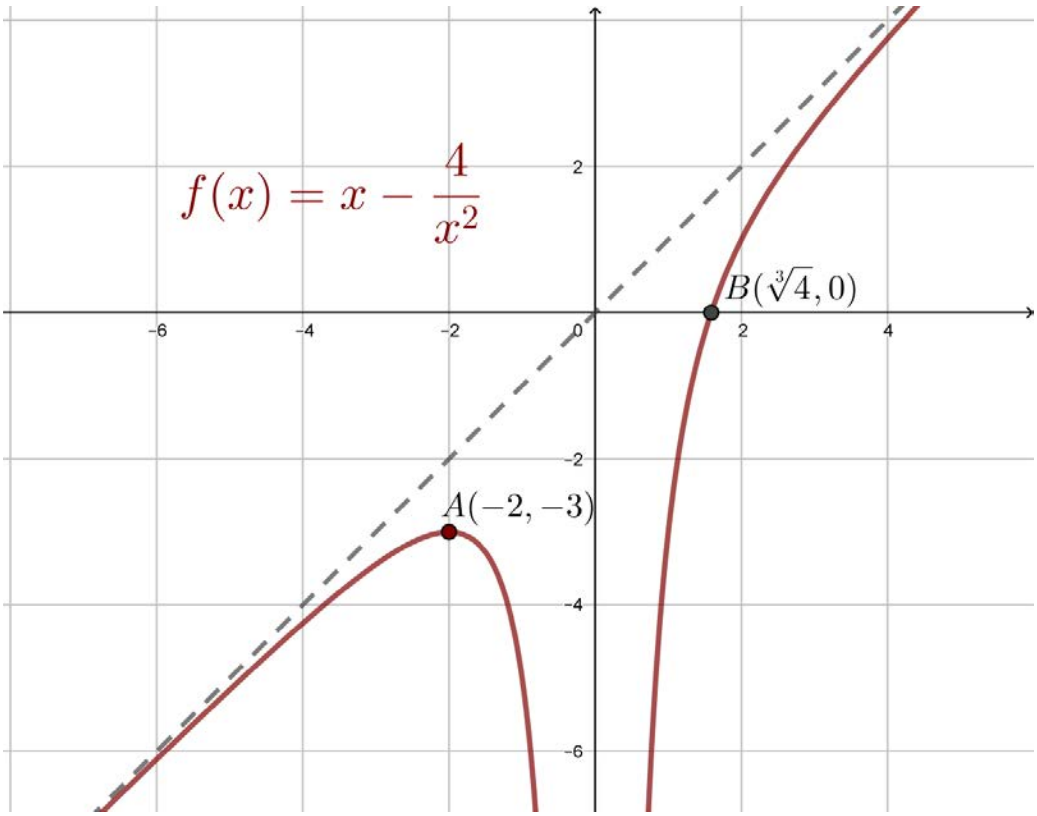
Και $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to-\infty}\left[x-\frac{4}{x^2}-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0$

Ομοίως είναι: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)=1$ και $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$

Άρα η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

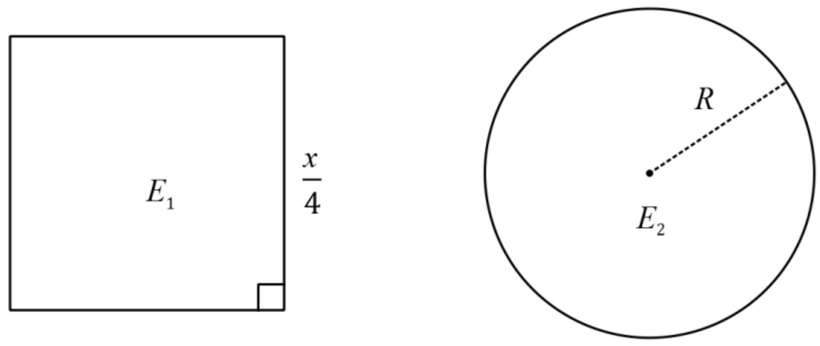
**B4.** Λύνω την εξίσωση $f(x)=0$ προκειμένου να βρω το σημείο τομής με τον άξονα x’x: $f(x)=0\Leftrightarrow x-\frac{4}{x^2}=0\Leftrightarrow x^3-4=0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{4}$. Άρα σημείο τομής με τον άξονα x’x είναι το $B\left(\sqrt[3]{4},0\right)$, με $1^3<4<2^3\Leftrightarrow 1<\sqrt[3]{4}<2$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



# ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.**




Εφόσον το μήκος του σύρματος είναι 8m και κόβουμε τμήμα μήκους x μέτρων, είναι προφανές ότι θα έχουμε $x \in (0,8)$.

Το μήκος του τετραγώνου θα είναι $L_1 = x$, επομένως η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με $\alpha = \frac{L_1}{4} = \frac{x}{4}$, και το εμβαδόν του είναι $E_1 = \alpha^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$ .

Έστω R η ακτίνα του κύκλου. Τότε η περίμετρος του κύκλου είναι $L_2 = 2\pi R$ και το εμβαδόν του: $E_2 = \pi R^2$.

Επομένως, αφού το συνολικό μήκος του σύρματος θα είναι $L = 8m$, θα ισχύει:

$$L = L_1 + L_2 \Leftrightarrow 8 = x + 2\pi R \Leftrightarrow R = \frac{8-x}{2\pi}.$$

Τότε το εμβαδόν του κύκλου γίνεται:

$$E_2 = \pi R^2 = \pi \cdot \left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(8-x)^2}{4\pi} \text{ , με } x \in (0,8).$$

Η συνάρτηση του αθροίσματος των εμβαδών των δυο σχημάτων είναι ίση με

$$E(x) = E_1 + E_2 = \frac{x^2}{16} + \frac{(8-x)^2}{4\pi} \text{ , } x \in (0,8).$$

Έτσι γίνεται:

$$\text{Άρα } E(x) = \frac{\pi x^2 + 4\left(64 - 16x + x^2\right)}{16\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} \text{ , με } x \in (0,8).$$

**Γ2.** Η συνάρτηση $\mathrm{E(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,8)$ ως πολυωνυμική, με:

$$E'(x)=\frac{2(\pi+4)x-64}{16\pi}=\frac{(\pi+4)x-32}{8\pi}.$$

Λύνουμε:

$$E'(x)=0 \Leftrightarrow (\pi+4)x-32=0 \Leftrightarrow x=\frac{32}{\pi+4}.$$

$$E'(x)>0 \Leftrightarrow (\pi+4)x-32>0 \Leftrightarrow x>\frac{32}{\pi+4}.$$

Οπότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας :

| $x$ | $0$ | | $\frac{32}{\pi+4}$ | | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $E'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $E(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Επομένως η συνάρτηση $\mathrm{E(x)}$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x=\frac{32}{\pi+4}$.

Για $x=\frac{32}{\pi+4}$ :

Η διάμετρος του κύκλου γίνεται:

$$\delta=2R=2\cdot\frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{2\pi}=\frac{8\pi+32-32}{\pi(\pi+4)}=\frac{8}{\pi+4}.$$

Και η πλευρά του τετραγώνου είναι: $\frac{x}{4}=\frac{\frac{32}{\pi+4}}{4}=\frac{8}{\pi+4}=\delta$.

Επομένως, πράγματι, το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

**Γ3.** Η $\mathrm{E(x)}$ στο διάστημα $A_1=\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής.

Οπότε έχουμε: $E(A_1)=\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to0^+}E(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)$, επειδή είναι: $E\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right)=\dfrac{16}{\pi+4}$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} E(x)=\dfrac{16}{\pi}$.

Είναι προφανές ότι $\dfrac{16}{\pi+4}<5$, ενώ $5<\dfrac{16}{\pi}\Leftrightarrow 5\pi<16$, που ισχύει, αφού $5\pi\simeq 15{,}7$.
Επομένως $5\in E\left(A_1\right)$, οπότε υπάρχει $x_1\in A_1$ τέτοιο, ώστε $E(x_1)=5$. Και επειδή η E(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1$, το $x_1$ θα είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $E(x)=5$ στο $A_1$.

Η E(x) στο διάστημα $A_2=\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής.

Οπότε έχουμε: $E\left(A_2\right)=\left[E\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right),\lim\limits_{x\to 8^-} E(x)\right)=\left[\dfrac{16}{\pi+4},4\right)$.

Προφανώς $5\notin E\left(A_2\right)$, οπότε δεν υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $E(x)=5$ στο $A_2$.

Επομένως υπάρχει μοναδική τιμή $x_1\in(0,8)$ τέτοια, ώστε $E(x_1)=5$, δηλαδή υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 $m^2$.

# ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $\mathbb{R}$, ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Έχουμε: $f\left(x\right)=2e^{x-\alpha}-x^2,\ x\in\mathbb{R}$, με $\alpha>1$.

Και $f'\left(x\right)=2e^{x-\alpha}-2x\ ,\ x\in\mathbb{R}$ και

$$f''\left(x\right)=2e^{x-\alpha}-2=2\left(e^{x-\alpha}-1\right)\ ,\ x\in\mathbb{R}.$$

Λύνουμε: $f''(x)=0\Leftrightarrow e^{x-\alpha}=e^0\Leftrightarrow x=\alpha$.

και $f''(x)>0\Leftrightarrow e^{x-\alpha}>e^0\Leftrightarrow x>\alpha$

Προκύπτει ο πίνακας:

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ∩ | | ∪ |

Σ.Κ.

Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής, το $A(\alpha, f(\alpha))$, δηλαδή το $A\left(\alpha, 2-\alpha^2\right)$.

**Δ2.** Από το πρόσημο της $f''$ (ερώτημα Δ1), προκύπτει ο παρακάτω πίνακας για τη μονοτονία της $f'$:

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f'(x)$ | ↘ | | ↗ |

Ο.Ε.

Δηλαδή η $f'(x)$ είναι: γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, \alpha]$

και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, +\infty)$.

Για το διάστημα $A_1 = (-\infty, \alpha]$:

**<u>Α' τρόπος</u>**

Είναι: $f'(0) = 2e^{-\alpha} > 0$, $f'(1) = 2e^{1-\alpha} - 2 = 2\left(e^{1-\alpha} - 1\right) < 0$ και αφού η $f'$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = 0$. Όμως η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, \alpha]$, οπότε το $x_1$ θα είναι μοναδική ρίζα της $f'$ στο διάστημα $(-\infty, \alpha]$.

**<u>Β' τρόπος</u>**

Έχουμε :

$$\lim_{x \to -\infty} f'(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(2e^{x-\alpha} - 2x\right) = +\infty, \text{ αφού } \lim_{x \to -\infty} e^{x-\alpha} = 0 .$$

Και $f'(\alpha) = 2e^0 - 2\alpha = 2 - 2\alpha = 2 \cdot (1-\alpha) < 0$, αφού $\alpha > 1$.

Η $f'$ είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) και γνησίως φθίνουσα στο $A_1$, επομένως θα είναι:

$f'(A_1)=\left[f(\alpha),\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)\right)=[2(1-\alpha),+\infty)$. Άρα $0\in f'(A_1)$, οπότε θα υπάρχει $x_1\in A_1$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1)=0$. Και επειδή η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1$, το $x_1$ θα είναι μοναδική ρίζα της $f'$ στο $A_1$.

Για το διάστημα $A_2=[\alpha,+\infty)$ έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2e^{x-\alpha}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[2e^{x-\alpha}\left(1-\frac{x}{e^{x-\alpha}}\right)\right]=+\infty,\text{ αφού}$$

$$\lim_{x\to+\infty}e^{x-\alpha}=+\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-\alpha}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=\!=}}\frac{1}{e^{x-\alpha}}=0.$$

Αντίστοιχα με το $A_1$, επειδή η $f'$ είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) και γνησίως αύξουσα, θα είναι: $f'(A_2)=[2(1-\alpha),+\infty)$ και, ομοίως με το $A_1$,θα έχει ακριβώς μία ρίζα $x_2\in A_2$.

Επίσης:

• Αν $x<x_1 \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_1)=0$,

άρα η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,x_1]$.

• Αν $x_1<x<\alpha \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_1)=0$

άρα η f θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1,\alpha]$.

• Αν $\alpha<x<x_2 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_2)=0$

άρα η f θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,x_2]$.

Μάλιστα επειδή η f είναι συνεχής στο α, θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1,x_2]$.

• Αν $x>x_2 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_2)=0$

άρα η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_2,+\infty)$.

Το πρόσημο της $f'$ και η μονοτονία της f φαίνονται ανά διάστημα στον πίνακα:

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $\alpha$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | ↘ | | ↘ | | ↗ | | ↗ | |
| $f'$ | | + | 0 | − | | − | 0 | + | |
| $f$ | | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ | |

Επομένως η f παρουσιάζει μόνο στο $x_1 \in (-\infty, \alpha]$ τοπικό μέγιστο και μόνο στο $x_2 \in [\alpha, +\infty)$ τοπικό ελάχιστο.

***Σημείωση:*** *Αν είχαμε ακολουθήσει τον Α' τρόπο στο ερώτημα Δ2, για το διάστημα* $(-\infty, \alpha]$*, τότε θα ξέραμε και ότι* $x_1 \in (0,1)$.

**Δ3.** ***<u>Α' τρόπος (αν είχαμε ακολουθήσει τον Α' τρόπο για το διάστημα (-∞,α] στο ερώτημα Δ2)</u>***

Από το Δ2 έχουμε ότι $x_1 \in (0,1)$. Άρα είναι $0 < x_1 < 1 < \alpha < x_2$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x_1, x_2]$, άρα και στο $(\alpha, x_2)$, οπότε έχουμε $f(1) > f(\alpha) > f(x_2)$, και άρα η f δεν παίρνει την τιμή $f(1)$ στο διάστημα $(\alpha, x_2)$.

Οπότε η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο διάστημα $(\alpha, x_2)$.

**<u>Β' τρόπος</u>**

Ισχύει $f'(x_1) = 0 \Leftrightarrow e^{x_1 - \alpha} - x_1 = 0 \Leftrightarrow e^{x_1 - \alpha} = x_1$ (1).

Όμως ξέρουμε ότι $x_1 < \alpha \Leftrightarrow x_1 - \alpha < 0 \Leftrightarrow e^{x_1 - \alpha} < 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x_1 < 1$.

Άρα θα είναι: $x_1 < 1 < \alpha < x_2$. Επίσης η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, x_2]$, οπότε προκύπτει: $f(x_2) < f(\alpha) < f(1)$. Επομένως η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο διάστημα $(\alpha, x_2)$.

***Σημείωση:*** *Η σχέση* $x_1 < 1 < \alpha$ *θα μπορούσε να αποδειχτεί και ως εξής:*

Έστω ότι $1 \leq x_1$. Τότε, επειδή η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_1]$, θα ισχύει: $f'(1) \geq f'(x_1) \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} \geq 1 \Leftrightarrow 1 - \alpha \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 1$.

Που είναι άτοπο. Επομένως συμπεραίνουμε ότι $x_1 < 1 < \alpha$.

**<u>Γ’ τρόπος</u>**

(Θεωρούμε ότι έχει αποδειχτεί η σχέση: $x_1 < 1 < \alpha < x_2$).

Έστω ότι υπάρχει κάποιο $\xi \in (\alpha, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = f(1)$.

Τότε αφού η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[1, \xi]$, από θεώρημα Rolle θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (1, \xi)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_o) = 0$, άτοπο, αφού ισχύει ότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$, άρα και για κάθε $x \in (1, \xi) \subseteq (x_1, x_2)$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο διάστημα $(\alpha, x_2)$.

**Δ4.** Αν $\alpha = 2$, τότε: $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$ και $f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2, -2)$, έχει εξίσωση:

$$y - f(2) = f'(2)\cdot(x-2) \Leftrightarrow y + 2 = -2\cdot(x-2) \Leftrightarrow y = -2x + 2.$$

Επίσης η f είναι κυρτή στο $[0, 3]$ , άρα θα ισχύει: $f(x) \geq -2x + 2$,

με το ίσον να ισχύει μόνο στο σημείο επαφής, δηλαδή για $x = 2$.

Τότε για $x \in (2, 3]$ ισχύει:

$$f(x) > -2x + 2 \underset{x\in(2,3]}{\overset{\cdot\sqrt{x-2}>0}{\Leftrightarrow}} f(x)\sqrt{x-2} > (-2x+2)\sqrt{x-2},$$

ενώ γενικά θα ισχύει : $f(x)\sqrt{x-2} \geq (-2x+2)\sqrt{x-2}$, με το = να ισχύει μόνο για $x = 2$. Οπότε προκύπτει:

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx .$$

Αρκεί, λοιπόν, να δείξω ότι $\displaystyle\int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx \geq -\frac{32}{15}$.

**<u>Α’ τρόπος υπολογισμού του ολοκληρώματος:</u>**

$$\int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx = \int_2^3 -2(x-2+1)\sqrt{x-2}\,dx$$

Θέτω $u = x - 2$.

Τότε θα είναι: $du = dx$,

ενώ για $x = 2$ παίρνουμε $u = 0$,
και για $x = 3$ παίρνουμε $u = 1$.

Το ολοκλήρωμα γίνεται: $\displaystyle\int_0^1 -2(u+1)\sqrt{u}\,du = -2\int_0^1 \left(u\sqrt{u} + \sqrt{u}\right)du =$

$$= -2\left[\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^1 = -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{32}{15}$$

**<u>Β’ τρόπος υπολογισμού του ολοκληρώματος (χωρίς αλλαγή μεταβλητής)</u>**

$$\int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx = \int_2^3 (-2x+4-2)\sqrt{x-2}\,dx$$

$$= \int_2^3 -2(x-2)\sqrt{x-2}\,dx - \int_2^3 2\sqrt{x-2}\,dx$$

$$= -2\int_2^3 (x-2)^{\frac{3}{2}}\,dx - 2\int_2^3 (x-2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= -2\left[\frac{2}{5}\cdot(x-2)^{\frac{5}{2}}\right]_2^3 - 2\left[\frac{2}{3}\cdot(x-2)^{\frac{3}{2}}\right]_2^3 = -2\cdot\frac{2}{5} - 2\cdot\frac{2}{3} = -\frac{32}{15}.$$

Τελικά θα ισχύει, πράγματι, ότι $\displaystyle\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15}$.

***Σημείωση:***

*Η αντικατάσταση $u = \sqrt{x-2}$ , την οποία συναντήσαμε σε πολλές προτεινόμενες απαντήσεις, δεν είναι σωστή, γιατί σύμφωνα με το πρώτο θεώρημα αλλαγής μεταβλητής σε ορισμένο ολοκλήρωμα, η συνάρτηση $u = g(x)$ (την οποία θέτουμε) πρέπει να έχει συνεχή παράγωγο στο κλειστό διάστημα [2,3], κάτι το οποίο δεν ισχύει για τη συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x-2}$.* ■