ΠΡΟΤΥΠΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ
ρούλα μακρή

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 19 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΕΛΙΔΑ 31.

Α2. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΕΛΙΔΑ 14.

Α3. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΕΛΙΔΑ 72.

Πλάτος μιας κλάσης ονομάζεται η διαφορά του κατώτερου από το ανώτερο όριο της κλάσης.

Α4. **α.** ΣΩΣΤΟ

β. ΛΑΘΟΣ

γ. ΛΑΘΟΣ

δ. ΣΩΣΤΟ

ε. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Συμπληρώνουμε τον πίνακα με τις στήλες των $x_i v_i$, $(x_i-\bar{x})^2, (x_i-\bar{x})^2 v_i$.

x_i	v_i	$x_i v_i$	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2 v_i$
1	2	2	-3	9	18
3	3	9	-1	1	3
5	4	20	1	1	4
9	1	9	5	25	25
Σύνολα	10	40			50

α. Η μέση τιμή των τιμών x_i της μεταβλητής Χ είναι : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i}{v} = \frac{40}{10} = 4$.

β. Ταξινομούμε τις παρατηρήσεις κατά αύξουσα σειρά.

$$1,1,3,3,\underbrace{3\,,\,5}_{\text{κεντρικές παρατηρήσεις}},5,5,5,9$$

Εφόσον το μέγεθος του δείγματος είναι άρτιο $(\nu = 10)$, τότε $\delta = \dfrac{x_5 + x_6}{2}$ (**1**)

Άρα $\delta = \dfrac{3+5}{2} = 4$.

γ. Η διακύμανση των τιμών του δείγματος είναι : $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i - \bar{x})^2 \nu_i = \dfrac{1}{10}50 = 5$.

Β2. Εφόσον διασπορά των τιμών είναι $s^2 = 5$, τότε η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{5}$.

Ο συντελεστής μεταβολής των τιμών είναι $CV = \dfrac{s}{|\bar{x}|} = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

Εξετάζουμε την τιμή του CV .

Έστω ότι $CV > 10\% \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{5}}{4} > \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \dfrac{5}{16} > \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow 500 > 16$, το οποίο ισχύει.

Άρα $CV > 10\%$. Συνεπώς οι τιμές της μεταβλητής δεν παρουσιάζουν ομοιογένεια..

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Με $f'(x) = (x^2 - x + 1)' = 2x - 1$.

Έχουμε :

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$.

Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x = \dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

Επειδή η $f'(x) > 0$ για $x \in \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ και $f'(x) < 0$ για $x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$, τότε για $x = \dfrac{1}{2}$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{4}$.

Γ2. Έχουμε ότι το σημείο $A(2,f(2))$ είναι το $A(2,3)$, διότι είναι $f(2)=2^2-2+1=4-2+1=3$.

Επίσης πρέπει να βρούμε την τιμή της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης f στο σημείο $x_0=2$. Έτσι έχουμε ότι:

$f'(2)=2\cdot 2-1=4-1=3$. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι της μορφής:

$y=f'(2)x+\beta \Leftrightarrow y=3x+\beta$ και γνωρίζουμε ότι η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο

$A(2,3)$. Άρα οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Έτσι έχουμε ότι $3=3\cdot 2+\beta \Leftrightarrow \beta=-3$. Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y=3x-3$.

Γ3. **Για τον x΄x έχουμε:** για $y=0$, τότε $0=3x-3 \Leftrightarrow x=1$. Άρα το σημείο είναι το $B(1,0)$.

Για τον $y'y$ **έχουμε:** για $x=0$, τότε $y=-3$. Άρα το σημείο είναι το $\Gamma(0,-3)$.

Γ4. Παρατηρούμε ότι το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x-1}=\frac{0}{0}$.

Για $x\neq 1$, έχουμε : $\frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1}=\frac{\left(\sqrt{f(x)}-1\right)\left(\sqrt{f(x)}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{f(x)}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{f(x)}\right)^2-1}{(x-1)\left(\sqrt{f(x)}+1\right)}=.$

$$\frac{f(x)-1}{(x-1)\left(\sqrt{f(x)}+1\right)}==\frac{x^2-x+1-1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\frac{x^2-x}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=$$

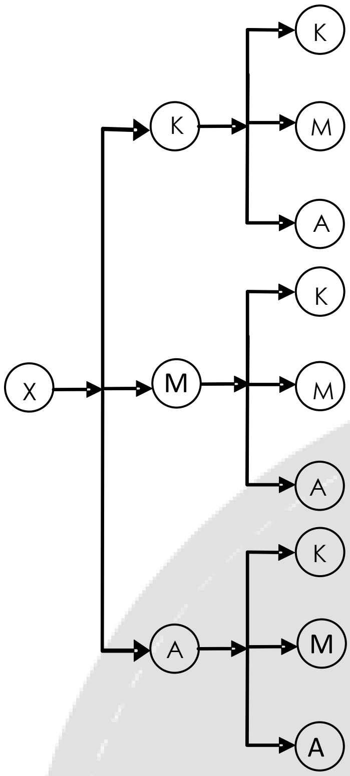
$$=\frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}+1}$$

Άρα το όριο είναι $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}+1}=\frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Συμβολίζουμε Κ την επιλογή κόκκινης σφαίρας, Μ την επιλογή μαύρης σφαίρας και τέλος Α την επιλογή άσπρης σφαίρας από το κουτί.

Κατασκευάζουμε το παρακάτω δενδροδιάγραμμα, έχοντας υπόψη μας ότι μετά την πρώτη επιλογή σφαίρας , επαναλαμβάνουμε για άλλη μια φορά την διαδικασία κάνοντας επανατοποθέτηση.



Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι ο $\Omega = \{AA, AM, AK, MA, MM, MK, KA, KM, KK\}$ και αποτελείται από 9 στοιχεία. Δηλαδή είναι $N(\Omega) = 9$.

Δ2. Το ενδεχόμενο Α αποτελείται από τα εξής στοιχεία:

$A = \{AM, MM, KM\}$, άρα $N(A) = 3$ και το σύνολο Β αποτελείται από τα εξής στοιχεία:

$B = \{AM, AK, MA, MK, KA, KM\}$, δηλαδή είναι $N(B) = 6$.

Δ3. α. Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε ότι: $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$, άρα είναι

- $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

  Θα βρούμε τα κοινά στοιχεία των ενδεχομένων Α και Β, δηλαδή το ενδεχόμενο $A \cap B$.

  Έτσι έχουμε ότι $A \cap B = \{AM, KM\}$ με $N(A \cap B) = 2$, άρα είναι

- $P(A \cap B) = \dfrac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \dfrac{2}{9}$.

- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{3}{9} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{9}$.

- $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{6}{9}-\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$.

β. Εφόσον ισχύουν και $B\cap\Gamma=\varnothing$ και $A\cap\Gamma=\varnothing$, διότι το ενδεχόμενο Γ είναι ασυμβίβαστο τόσο με το Β όσο και με το Α.

Τότε το ενδεχόμενο $\Gamma\subseteq(A\cup B)'$, όπου $(A\cup B)'=\{KK,AA\}$.

Με $P\left[(A\cup B)'\right]=\frac{N\left[(A\cup B)'\right]}{N(\Omega)}=\frac{2}{9}$.

Άρα $P(\Gamma)\leq P\left[(A\cup B)'\right]\Rightarrow P(\Gamma)\leq\frac{2}{9}$.

Άρα η μέγιστη πιθανότητα που μπορεί να έχει το ενδεχόμενο Γ είναι $P(\Gamma)=\frac{2}{9}$.