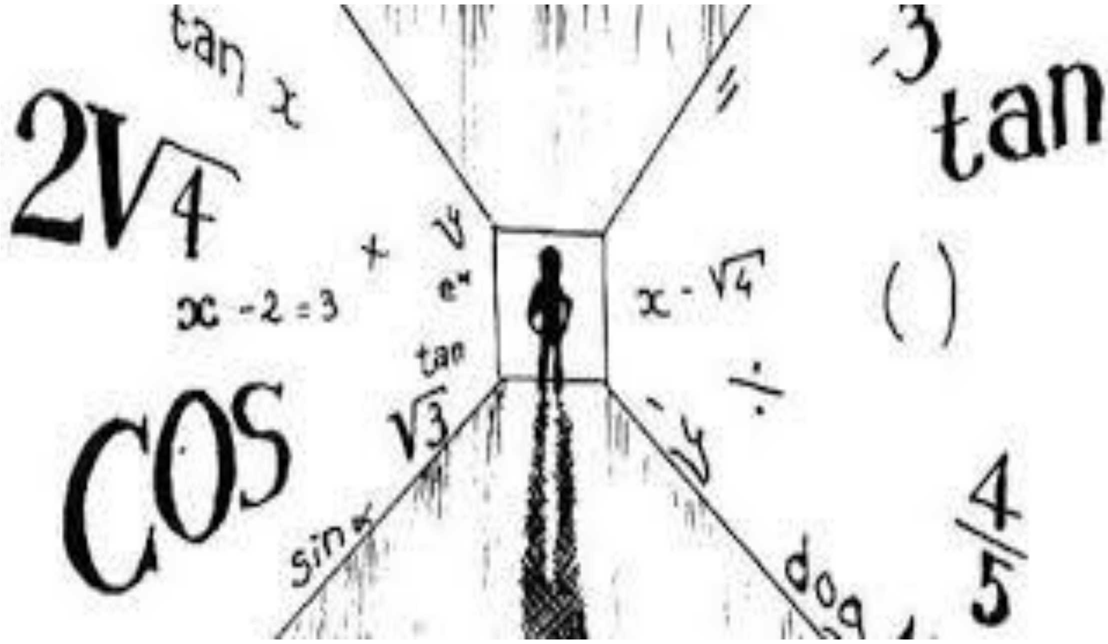
ΠΡΟΤΥΠΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ
ρούλα μακρή

Απαντήσεις Πανελλήνιες 2016

Μαθηματικά

Σπουδές Θετικές - Οικονομίας & Πληρ/κης



Τομέας Μαθηματικών "ρούλα μακρή"

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελίδα 262.

Α2. Ορισμός. Σχολικό βιβλίο σελίδα 141.

Α3. Θεώρημα. Σχολικό βιβλίο σελίδα 246-247.

Α4. α. **Λ** β. **Σ** γ. **Λ** δ. **Σ** ε. **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)'=\frac{\left(x^2\right)'\cdot\left(x^2+1\right)-x^2\cdot\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x\cdot\left(x^2+1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Η f είναι συνεχής ως ρητή με $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Για $x>0$ έχουμε $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Για $x<0$ έχουμε $f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=0$ το $f(0)=0$.

Β2. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με :

$$f''(x)=\left(\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)'=\frac{(2x)'\cdot\left(x^2+1\right)^2-2x\cdot\left(\left(x^2+1\right)^2\right)'}{\left(x^2+1\right)^4}=$$

$$\frac{2\cdot\left(x^2+1\right)^2-2x\cdot 2\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{2\cdot\left(x^2+1\right)^2-8x^2\cdot\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=$$

$$=\frac{2\left(x^2+1\right)\left[\left(x^2+1\right)-4x^2\right]}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{2\left(1-3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{2-6x^2}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3}\geq 0 \overset{(x^2+1)^3>0}{\Leftrightarrow} -6x^2+2\geq 0 \Leftrightarrow x^2\leq\frac{1}{3}\Leftrightarrow$$

$|x|\leq\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow-\frac{\sqrt{3}}{3}\leq x\leq\frac{\sqrt{3}}{3}$. Άρα η f κοίλη στο $(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}]$, κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και κοίλη στο $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$.

Παρουσιάζει σημεία καμπής στα $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ και $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ δηλαδή στα $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$ και $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$.

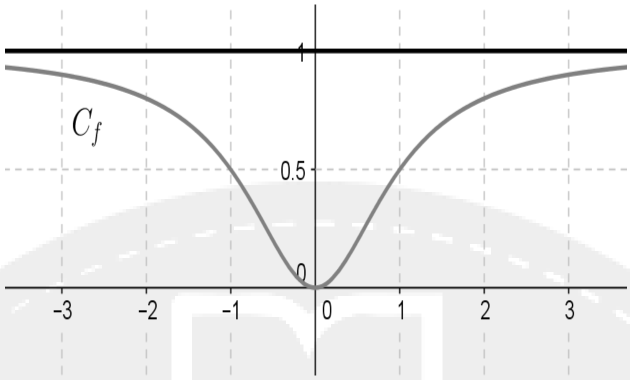
B3. Η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες γιατί ορίζεται και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-0\cdot x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$.

Άρα η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=1$ στο $+\infty$ και την ίδια στο $.-\infty$

Β4. Έχοντας υπόψη μας τα ερωτήματα Β1,Β2,Β3 σχηματίζουμε την παρακάτω γραφική παράσταση της f.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=e^{x^2}-x^2-1$, με $x\in A=\mathbb{R}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $A=\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με : $g'(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)'=2xe^{x^2}-2x=2x\left(e^{x^2}-1\right)$.

Η $g'(x)=0$ έχει ρίζα την $x=0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$2x$	$-$	0	$+$
$e^{x^2}-1$	$+$	0	$+$
$g'(x)=2x\left(e^{x^2}-1\right)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Το πρόσημο της g' καθώς και η μονοτονία της g παρουσιάζεται στον παραπάνω πίνακα.

Άρα για $x>0\overset{g\nearrow}{\Rightarrow}g(x)>g(0)=0$. Συνεπώς $g(x)>0$ για $x>0$.

Όμοια για $x<0\overset{g\searrow}{\Rightarrow}g(x)>g(0)=0$. Συνεπώς $g(x)>0$ για $x<0$.

Επειδή $g(0)=0$, τότε η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=0$. Συνεπώς η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$ είναι η $x=0$.

Γ2. Από το ερώτημα Γ_1, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$.

Συνεπώς $f^2(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2 \Leftrightarrow |f(x)| = \left|e^{x^2} - x^2 - 1\right| \Leftrightarrow |f(x)| = e^{x^2} - x^2 - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ δεν μηδενίζεται.

Επομένως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Έτσι :

Για $x \in (-\infty, 0)$ έχουμε:

$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ για $x < 0$ (**1**) **ή** $f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)$, $x < 0$ (**2**).

Για $x \in (0, +\infty)$ έχουμε :

$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ για $x > 0$ **(3) ή** $f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)$, $x > 0$ (**4**).

και επιπλέον $f(0) = 0$ (**5**)

Από τις παραπάνω περιπτώσεις έχουμε:

Από (**1**), (**3**),(**5**) έχουμε : $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$,για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Από (**2**), (**4**), (**5**) έχουμε : $f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)$,για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Από τις (**1**), (**4**), (**5**) έχουμε $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1 & , x \leq 0 \\ -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right) & , x > 0 \end{cases}$.

Από τις (**2**), (**3**), (**5**) έχουμε $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1 & , x > 0 \\ -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right) & , x \leq 0 \end{cases}$.

Γ3. Η $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = 2x\left(e^{x^2} - 1\right)$ και $f''(x) = 2\left(e^{x^2} - 1\right) + 4x^2e^{x^2} = 2\left(2x^2e^{x^2} + e^{x^2} - 1\right)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $m(x) = 2x^2e^{x^2} + e^{x^2} - 1$, με $m'(x) = 2xe^{x^2}\left(2x^2 + 3\right)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$2x$	$-$	0	$+$
e^{x^2}	$+$		$+$
$(2x^2+3)$	$+$		$+$
$m'(x)=2xe^{x^2}(2x^2+3)$	$-$	0	$+$
$m(x)$	↘		↗

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση m παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=0$ το $m(0)=0$.

Άρα $f''(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Συνεπώς η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x+3)-f(x)$ ορισμένη στο $[0,+\infty)$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα $h'(x)=f'(x+3)-f'(x)$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, τότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)\subseteq\mathbb{R}$.

Άρα για κάθε $x\in[0,+\infty)$ ισχύει $x+3>x$ και επειδή η f' γνησίως αύξουσα έχουμε:

$f'(x+3)>f'(x)\Leftrightarrow f'(x+3)-f'(x)>0\Leftrightarrow h'(x)>0$. Δηλαδή η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, άρα και $1-1$.

Η εξίσωση $f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$, για $x\in[0,+\infty)$ γράφεται :

$h(|\eta\mu x|)=h(x)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}|\eta\mu x|=x$.

Επειδή $|\eta\mu x|\leq|x|$, για $x\in[0,+\infty)$ έχουμε $|\eta\mu x|\leq x$, με το ίσον να ισχύει για $x=0$.

Άρα η λύση της εξίσωσης είναι η $x=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x\,dx=\pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi}\left(f(x)\eta\mu x+f''(x)\eta\mu x\right)dx=\pi \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x\,dx+\int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x\,dx=\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)(\text{-}\sigma\upsilon\nu x)'\,dx+\int_0^{\pi}\left(f'(x)\right)'\eta\mu x\,dx=\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[-f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)(-\sigma\upsilon\nu x)dx+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx=\pi$$

$$\Leftrightarrow -f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi-\left(-f(0)\sigma\upsilon\nu 0\right)+\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx+$$

$$f'(\pi)\eta\mu\pi-f'(0)\eta\mu 0-\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx=\pi \Leftrightarrow f(\pi)+f(0)=\pi \ (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}, x\in(\text{-}\pi,0)\cup(0,\pi)$.

Ισχύει από την υπόθεση $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$.

Είναι $g(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\Rightarrow f(x)=g(x)\eta\mu x$ και

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} g(x)\cdot\eta\mu x\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\left(\lim_{x\to 0} g(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\eta\mu x\right)=1\cdot 0=0$$

$\overset{f\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\eta\varsigma\ \sigma\tau o\ 0}{\Rightarrow} f(0)=0$. Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(\pi)+f(0)=\pi\Rightarrow f(\pi)+0=\pi\Rightarrow f(\pi)=\pi\ .$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_o=0$.

Είναι $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)\cdot\eta\mu x-0}{x}=$

$$\lim_{x\to 0}\left(g(x)\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)\overset{\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1}{=}\left(\lim_{x\to 0} g(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\right)=1\cdot 1=1\Rightarrow f'(0)=1.$$

Δ2. α) Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$, επειδή το x_o είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα ισχύει $f'(x_0)=0$.

Με f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ προκύπτει ότι οι συναρτήσεις $h(x)=e^{f(x)}+x,\ k(x)=f(f(x))+e^x,\ x\in R$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$

Αλλά $h'(x)=\left(e^{f(x)}+x\right)'=e^{f(x)}\cdot f'(x)+1$ και

$k'(x)=\left(f(f(x))+e^x\right)'=f'(f(x))\cdot f'(x)+e^x, x\in\mathbb{R}$.

Θα ισχύει λοιπόν $e^{f(x)}\cdot f'(x)+1=f'(f(x))\cdot f'(x)+e^x, x\in\mathbb{R}$

$\overset{x=x_0}{\Rightarrow} e^{f(x_0)}\cdot f'(x_0)+1=f'(f(x_0))\cdot f'(x_0)+e^{x_0}\Rightarrow 1=e^{x_0}\Rightarrow x_0=0$ άτοπο αφού $f'(0)=1\neq 0$.

Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Δ2. β) Η f' είναι συνεχής και δεν έχει ρίζα , άρα διατηρεί το πρόσημο της . Αφού είναι $f'(0)=1>0$ θα είναι και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Δ3. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

Ακόμα είναι $|\eta\mu x|\leq 1$ και $|\sigma\upsilon\nu x|\leq 1$ οπότε $|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|\leq 2$.

Τότε $|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|\leq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{|f(x)|}\cdot|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|\leq 2\cdot\dfrac{1}{|f(x)|}\overset{f(x)>0}{\Rightarrow}\left|\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|\leq\dfrac{2}{f(x)}\Rightarrow$

$\left|\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|\leq\dfrac{2}{f(x)}\Rightarrow -\dfrac{2}{f(x)}\leq\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\leq\dfrac{2}{f(x)}$. Αφού είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$ τότε από κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$.

Δ4. Είναι $\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x}dx$.

Θέτουμε $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$. Το $x_1 = 1$ μας δίνει $u_1 = \ln 1 = 0$ και το $x_2 = e^\pi$ μας δίνει $u_2 = \ln e^\pi = \pi$ και έχουμε $\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x}dx = \int_0^\pi f(u)du$

$$0 \leqslant u \leqslant \pi \overset{f \nearrow [0,\pi]}{\Rightarrow} f(0) \leqslant f(u) \leqslant f(\pi) \Rightarrow 0 \leqslant f(u) \leqslant \pi \Rightarrow \int_0^\pi 0du < \int_0^\pi f(u)du < \int_0^\pi \pi du \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < \int_0^\pi f(u)du < [\pi x]_0^\pi \Rightarrow 0 < \int_0^\pi f(u)du < (\pi \cdot \pi - \pi \cdot 0) \Rightarrow 0 < \int_0^\pi f(u)du < \pi^2$$

το ίσον δεν μπαίνει γιατί δεν ισχύει παντού η ισότητα .

Σχολιασμός θεμάτων

Θέματα διαφορετικά από τις προηγούμενες χρονιές. Λείπουν υπαρξιακά θεωρήματα και για πρώτη φορά μετά από χρόνια οι μαθητές καλούνται να σχεδιάσουν μια σχετικά εύκολη γραφική παράσταση. Το θέμα Β εξετάζει βασικά στοιχεία διαφορικού λογισμού ενώ τα θέματα Γ και Δ ήταν ερωτήματα αυξημένης δυσκολίας. Το θέμα Γ2 απαιτεί μεγάλη προσοχή στην αιτιολόγηση της απάντησης.