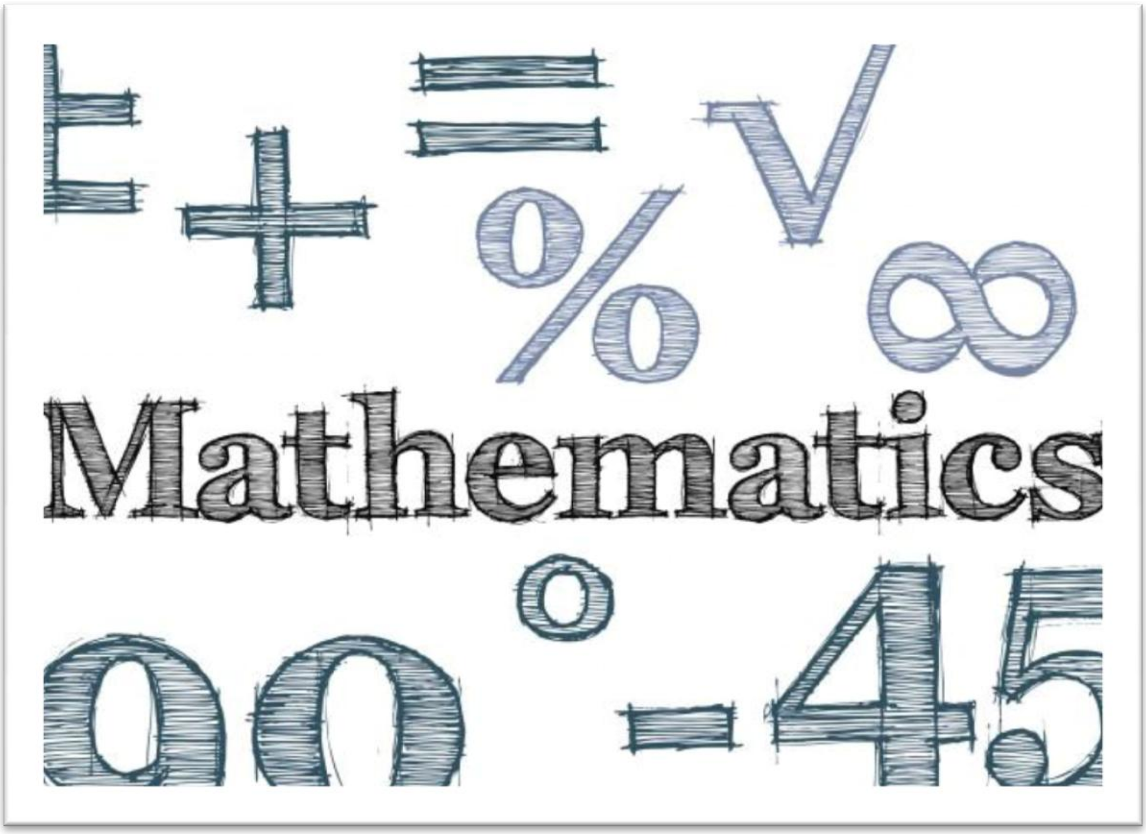
ΠΡΟΤΥΠΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ
ρούλα μακρή

Απαντήσεις Πανελλήνιες 2016

Μαθηματικά Γενικής



Τομέας Μαθηματικών "ρούλα μακρή"

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2016 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 150-151

Α2. Ορισμός . Σχολικό Βιβλίο σελ. 87

Α3. Ορισμός . Σχολικό βιβλίο σελ. 14 (β΄περίπτωση)

Α4.

α. **Σωστό**, Σχολικό Βιβλίο σελ.151 , Θεώρημα 4

β. **Λάθος**, Σχολικό Βιβλίο σελ. 87

γ. **Σωστό**, Σχολικό Βιβλίο σελ. 31

δ. **Σωστό**, Σχολικό Βιβλίο σελ. 67

ε. **Λάθος**, Σχολικό Βιβλίο σελ. 40

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x-1\right)'=3\frac{x^2}{3}-2\frac{5}{2}x+6=x^2-5x+6$$

Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=0$ το $f(0)=0$.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)=x^2-5x+6$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=2$ το

$$f(2)=\frac{2^3}{3}-\frac{5}{2}\cdot 2^2+6\cdot 2-1=\frac{8}{3}+1=\frac{11}{3}$$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2=3$ το

$$f(3)=\frac{3^3}{3}-\frac{5}{2}\cdot 3^2+6\cdot 3-1=9-\frac{45}{2}+18-1=\frac{52}{2}-\frac{45}{2}=\frac{7}{2}$$

B2. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0,f(0))$ έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)(x-0)$. Είναι $f(0)=\frac{0^3}{3}-\frac{5}{2}\cdot 0^2+6\cdot 0-1=-1$ και $f'(0)=0^2-5\cdot 0+6=6$ οπότε και η εξίσωση θα είναι

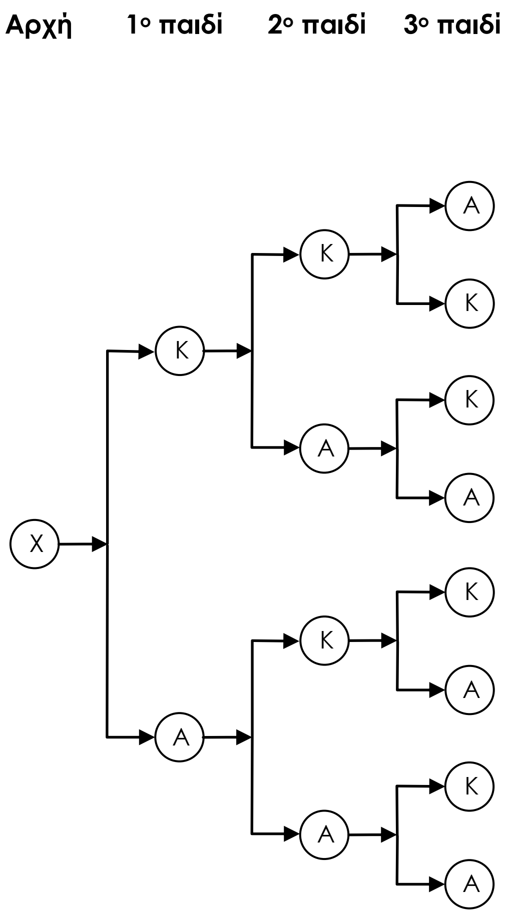
$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y-(-1)=6(x-0)\Rightarrow y+1=6x\Rightarrow y=6x-1.$$

B3.

$$\lim_{x\to -1}\frac{f'(x)-12}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-5x+6-12}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-5x-6}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(x-6)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-6)=-7$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.



Το παραπάνω πείραμα τύχης περιλαμβάνει 3 στάδια (Όσα και τα παιδιά που έχει η οικογένεια). Κατασκευάζουμε το διπλανό δενδροδιάγραμμα και διαβάζοντας κάθε μία από τις διαδρομές κάθε «κλαδιού» προσδιορίζουμε τον δειγματικό χώρο Ω.

Στο ερώτημα αυτό μας ενδιαφέρει και η σειρά
γέννησης αλλά και το φύλο. Άρα έχουμε τον παρακάτω δειγματικό χώρο

$$\Omega=\{KKA, KKK, KAK, KAA, AKK, AKA, AAK, AAA\}$$

Γ2.

Α: «το πρώτο παιδί είναι κορίτσι »

$A=\{KKA,KKK,KAK,KAA\}$

Β: « ο αριθμός των κοριτσιών υπερβαίνει τον αριθμό των αγοριών »

$B=\{KKA,KKK,KAK,AKK\}$

Γ: « τα δύο πρώτα παιδιά είναι του ίδιου φύλου »

$\Gamma=\{KKA,KKK,AAK,AAA\}$

Γ3.

α) Είναι $\Delta=A\cap B=\{KKA,KKK,KAK\}$ και $P(\Delta)=\dfrac{N(\Delta)}{N(\Omega)}=\dfrac{3}{8}$.

Είναι $E=A\cup B=\{KKA,KKK,KAK,KAA,AKK\}$ και $P(E)=\dfrac{N(E)}{N(\Omega)}=\dfrac{5}{8}$.

Είναι $Z=\Gamma-E=\{AAK,AAA\}$ και $P(Z)=\dfrac{N(Z)}{N(\Omega)}=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$.

β) Η: « δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A,B»

Είναι $H=(A\cup B)'$, άρα $P(H)=P\left[(A\cup B)'\right]=1-P(A\cup B)=1-\dfrac{5}{8}=\dfrac{3}{8}$.

Θ: « πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A,B»

Είναι $\Theta=(A-B)\cup(B-A)$, άρα

$$P(\Theta)=P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A-B)+P(B-A)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-2\cdot\frac{3}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

Είναι $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$ και $P(B)=\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Γνωρίζουμε ότι οι κλάσεις πλάτους c του δείγματος έχουν τη μορφή :

$[8,8+c),[8+c,8+2c),[8+2c,8+3c)\ [8+3c,8+4c)$.

Εφόσον $x_2=14$ η κεντρική τιμή της $2^{ης}$ κλάσης τότε:

$x_2 = 14 = \dfrac{8+c+8+2c}{2} \Leftrightarrow 14 = \dfrac{16+3c}{2} \Leftrightarrow 28 = 16+3c \Leftrightarrow 12 = 3c \Leftrightarrow c = 4$.

Δ2. Για $c=4$, οι κλάσεις είναι $[8,12)$, $[12,16)$, $[16,20)$, $[20,24)$ και οι κεντρικές τιμές κάθε κλάσης είναι $x_1 = 10$, $x_2 = 14$, $x_3 = 18$, $x_4 = 22$.

Γνωρίζουμε ότι

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i}{v} = 14 \Leftrightarrow \frac{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4}{v_1+v_2+v_3+v_4} = 14 \Leftrightarrow \frac{200+210+180+22v_4}{45+v_4} = 14$$

$$\Leftrightarrow \frac{590+22v_4}{45+v_4} = 14 \Leftrightarrow 590+22v_4 = 630+14v_4 \Leftrightarrow 8v_4 = 40 \Leftrightarrow v_4 = 5.$$

Με βάση τα παραπάνω στοιχεία ο πίνακας συμπληρωμένος είναι :

Χρόνος (Σε λεπτά)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i
$[8,12)$	10	20
$[12,16)$	14	15
$[16,20)$	18	10
$[20,24)$	22	5
ΣΥΝΟΛΟ		50

Δ3. Χωρίζουμε την κλάση $[8,12)$ στις υποκλάσεις $\kappa_1 = [8,9)$, $\kappa_2 = [9,10)$, $\kappa_3 = [10,11)$ $\kappa_4 = [11,12)$. Λόγω της ομοιόμορφης κατανομής των παρατηρήσεων, κάθε μία από τις παραπάνω υποκλάσεις περιέχει $\dfrac{v_1}{4} = \dfrac{20}{4} = 5$ υπολογιστές.

Συνεπώς τουλάχιστον 9 λεπτά για να τρέξουν το πρόγραμμα, χρειάστηκαν οι υπολογιστές των υποκλάσεων $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$, δηλαδή $3 \cdot 5 = 15$ υπολογιστές και οι υπολογιστές των υπολοίπων κλάσεων . Συνολικά 15+14+18+22=45 υπολογιστές .

Δ4. Για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης s θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $s^2 = \dfrac{1}{v}\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2 v_i$.

Χρόνος (Σε λεπτά)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
$[8,12)$	10	20	-4	16	320
$[12,16)$	14	15	0	0	0
$[16,20)$	18	10	4	16	160
$[20,24)$	22	5	8	64	320
ΣΥΝΟΛΟ		50			800

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε $\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2 v_i = 800$. Συνεπώς

$s^2 = \frac{1}{50}800 = 16$. Τελικά $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$ λεπτά.

Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι:

$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{14} \approx 0,2857 = 28,57\%$.

Επειδή $CV > 10\%$, τότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Δ5. Έστω y_i, με $i = 1,2,3,4$ οι χρόνοι που τρέχουν οι υπολογιστές μετά την αντικατάσταση του επεξεργαστή τους. Τότε $y_i = 0,8 \cdot x_i$, με $i = 1,2,3,4$. Από εφαρμογή του σχολικού βιβλίου έχουμε ότι :

Ο νέος μέσος χρόνος $\bar{y}$ θα είναι $\bar{y} = 0,8 \cdot \bar{x}$ και η νέα τυπική απόκλιση $s_y = 0,8 \cdot s$.

Ο νέος συντελεστής μεταβολής CV_y είναι : $CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{\cancel{0,8}s}{\cancel{0,8}\bar{x}} = 28,57\%$.

Δηλαδή η ομοιογένεια του δείγματος δεν άλλαξε.

Σχολιασμός Θεμάτων

Τα θέματα κρίνονται εύκολα σε σχέση με θέματα παρελθόντων ετών . Το Θέμα Β εξετάζει βασικές έννοιες από το κεφάλαιο της Ανάλυσης , το Θέμα Γ εξετάζει ενδεχόμενα και πιθανότητες αυτών και για πρώτη φορά ζητείται από τους μαθητές να σχεδιάσουν δεντροδιάγραμμα , ενώ στο Θέμα Δ εξετάζεται το κεφάλαιο της Στατιστικής. Απουσιάζουν τα συνδυαστικά ερωτήματα που θα ξεχωρίσουν τον πολύ καλό από τον άριστο μαθητή