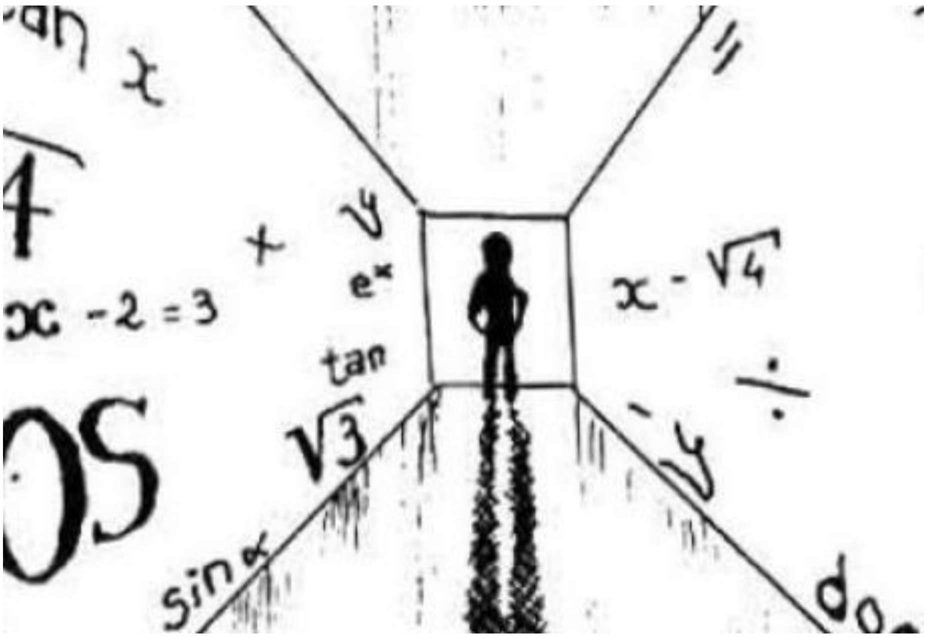
ΠΡΟΤΥΠΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ
ρούλα μακρή

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2015



Τομέας Μαθηματικών "ρούλα μακρή"

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Πρότυπου Εκπαιδευτικού Οργανισμού

“ρούλα μακρή”

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ’ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ’ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β’) ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015 – ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **Θεωρία .** Σχολικό βιβλίο σελίδα 194.

Α2 **Θεωρία .** Σχολικό βιβλίο σελίδα 188.

Α3. **Θεωρία** . Σχολικό βιβλίο σελίδα 259.

Α4. **α.** Λάθος

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Σωστό

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$ **.** Η σχέση $|z-4| = 2|z-1|$, γράφεται:

$|(x-4)+yi| = 2|(x-1)+yi| \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4(x^2 - 2x + 1 + y^2) \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 = 12 \Leftrightarrow$
$x^2 + y^2 = 2^2$ (**1**) . Η σχέση (**1**) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

Β2. **α.** Επειδή οι μιγαδικοί z_1 , z_2 ανήκουν στον κύκλο του **Β1** ερωτήματος τότε $|z_1| = |z_2| = 2$.

Άρα $|z_1|^2 = |z_2|^2 = z_1\overline{z_1} = z_2\overline{z_2} = 4$ (**2**).

Από τη σχέση (**2**) , $z_1, z_2 \neq 0$ και προκύπτουν : $\overline{z_1} = \dfrac{4}{z_1}$ (**3**) και $\overline{z_2} = \dfrac{4}{z_2}$ (**4**).

Για $w=\dfrac{2z_1}{z_2}+\dfrac{2z_2}{z_1}$ έχουμε:

$$\overline{w}=\left(\frac{2\overline{z_1}}{\overline{z_2}}+\frac{2\overline{z_2}}{\overline{z_1}}\right)\overset{(3)}{\underset{(4)}{=}}\frac{2\dfrac{4}{z_1}}{\dfrac{4}{z_2}}+\frac{2\dfrac{4}{z_2}}{\dfrac{4}{z_1}}=\frac{2z_2}{z_1}+\frac{2z_1}{z_2}=w\ .$$

Επειδή $w=\overline{w}$, τότε $w\in\mathbb{R}$.

β.

$$\left|\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\right|\le\left|\frac{2z_1}{z_2}\right|+\left|\frac{2z_2}{z_1}\right|\Leftrightarrow\left|\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\right|\le2\left|\frac{z_1}{z_2}\right|+2\left|\frac{z_2}{z_1}\right|\Leftrightarrow\left|\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\right|\le2\frac{|z_1|}{|z_2|}+2\frac{|z_2|}{|z_1|}\Leftrightarrow$$

$$|w|=\left|\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\right|\le2\frac{2}{2}+2\frac{2}{2}\Leftrightarrow|w|\le4$$

$\Leftrightarrow -4\le w\le4$, αφού $w\in\mathbb{R}$.

B3. Για $w=-4$, έχουμε $-4=\dfrac{2z_1}{z_2}+\dfrac{2z_2}{z_1}\Leftrightarrow z_1^2+z_2^2=-2z_1z_2\Leftrightarrow(z_1+z_2)^2=0\Leftrightarrow z_1=-z_2$.

$(A\Gamma)=|z_1-z_3|=|z_1-2iz_1|=|z_1||1-2i|=\sqrt{5}|z_1|.$

$(B\Gamma)=|z_2-z_3|=|-z_1-2iz_1|=|-z_1||1-2i|=\sqrt{5}|z_1|.$

Επειδή (ΑΓ)=(ΒΓ) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (ΑΓ)=(ΒΓ)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $A=\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα και συνεχής.

$$f'(x)=\frac{e^x(x^2+1)-e^x\cdot2x}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}\text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}\ .$$

Η παράγωγος δηλαδή είναι θετική εκτός από το σημείο $x_0=1$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα το σύνολο τιμών της είναι το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$.

Έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}\cdot e^x=0\cdot 0=0$$
.

Επίσης

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$
.

Άρα $f(A)=(0,+\infty)$.

Γ.2 Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, είναι και '$1-1$' .

Ισχύει $f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=f(2)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}e^{3-x}\cdot(x^2+1)=2\Leftrightarrow\dfrac{e^x}{x^2+1}=\dfrac{e^3}{2}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^3}{2}$.

Διότι $\dfrac{e^3}{2}\in f(A)$ η εξίσωση $f(x)=\dfrac{e^3}{2}$ έχει ρίζα και επειδή η είναι f είναι γνησίως αύξουσα στο A , είναι μοναδική.

Γ3 Έστω $F(w)=\int_0^w f(t)dt$ ορισμένη στο $D_F=[0,+\infty)$, αφού f συνεχής στο $[0,+\infty)\subseteq\mathbb{R}$,οπότε η F αρχική της f στο $D_F=[0,+\infty)$, με $F(2x)=\int_0^{2x} f(t)dt$ και $F(4x)=\int_0^{4x} f(t)dt$.

Η F είναι συνεχής στο $D_F=[0,+\infty)$ ως παραγωγίσιμη άρα και για $x>0$ στο διάστημα $[2x,4x]$ και παραγωγίσιμη στο $(2x,4x)$,οπότε από το θεώρημα μέσης τιμής , υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(2x,4x)$ τέτοιο ώστε: $F'(\xi)=\dfrac{F(4x)-F(2x)}{4x-2x}=\dfrac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x}$.

$\left(F(x)\right)'=\left(\int\limits_0^x f(t)dt\right)'\Leftrightarrow F'(x)=f(x)>0$ στο D_F , άρα η F' γνησίως αύξουσα στο D_F .

Επειδή ,για $x>0$ έχουμε $2x<\xi<4x\overset{F'\uparrow}{\Leftrightarrow}F'(2x)<F'(\xi)<F'(4x)\Rightarrow\dfrac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x}<f(4x)\overset{2x>0}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow\int_{2x}^{4x} f(t)dt<2xf(4x)$$

Γ.4 Έστω $\Phi(x)=\int_{2x}^{4x} f(t)dt=\int_{\alpha}^{4x} f(t)dt-\int_{\alpha}^{2x} f(t)dt$, με $\alpha\in\mathbb{R}$ και f συνεχής στο $\mathbb{R}$,τότε η Φ είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων σύνθετων συναρτήσεων, άρα και συνεχής .

Τότε $\lim\limits_{x\to 0}\Phi(x)=\Phi(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x}\underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\left[4f(4x)-2f(2x)\right]=4f(0)-2f(0)=2.$$

$g(0)=2$.Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=g(0)=2$, η g συνεχής στο 0.

Για $x>0$, η $g(x)$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Άρα η g συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Για $x>0$ ισχύει $g'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'\int_{2x}^{4x} f(t)dt+\frac{1}{x}\left(\int_{2x}^{4x} f(t)dt\right)'=\frac{x(4f(4x)-2f(2x))-\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x^2}$

$$\overset{(\Gamma 3)}{>}\frac{4xf(4x)-2xf(2x)-2xf(4x)}{x^2}=\frac{2(f(4x)-f(2x))}{x}$$

Η $g'(x)>0$, για $x>0$, διότι $f(4x)>f(2x)$, επειδή f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f'(x)\cdot\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2\Leftrightarrow e^{f(x)}\cdot f'(x)+e^{-f(x)}\cdot f'(x)=2\Leftrightarrow$

$\left(e^{f(x)}\right)'-\left(e^{-f(x)}\right)'=(2x)'\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}-e^{-f(x)}\right)'=(2x)'$. Άρα υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c$ (**1**) για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Για $x=0$ στην (**1**) έχουμε

$$e^{f(0)}-e^{-f(0)}=2\cdot 0+c\overset{f(0)=0}{\Leftrightarrow}e^0-e^0=c\Leftrightarrow c=0.$$

Οπότε από την (**1**) έχουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ότι:

$$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x\Leftrightarrow e^{f(x)}-\frac{1}{e^{f(x)}}=2x\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}\right)^2-2xe^{f(x)}-1=0\Leftrightarrow$$

$\overset{+x^2}{\Leftrightarrow}\left(e^{f(x)}\right)^2-2xe^{f(x)}+x^2=x^2+1\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}-x\right)^2=x^2+1\neq 0$ **(2)**, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θεωρούμε $g(x)=e^{f(x)}-x$ (**3**) ,$x\in\mathbb{R}$, συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων . Η σχέση (**2**) γράφεται $g^2(x)=x^2+1$ (**4**).

Έστω $x=\rho$ ρίζα της g(x) , οπότε $g(\rho)=0$ και λόγω της (**4**) με $x=\rho$ έχουμε $g^2(\rho)=\rho^2+1\Leftrightarrow$

$0=\rho^2+1$ αδύνατο. Άρα η g συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{R}$, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Στην $g(x)$ με $x=0$ έχουμε $g(0)=e^0-0=1>0$, άρα $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Οπότε από την (**4**) έχουμε $g(x)=\sqrt{x^2+1}\overset{(3)}{\Rightarrow} e^{f(x)}-x=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow e^{f(x)}=x+\sqrt{x^2+1}>0$.

(αφού $x^2+1>x^2\Rightarrow\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq -x\Rightarrow x+\sqrt{x^2+1}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$) οπότε $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ για κάθε ,$x\in\mathbb{R}$.

Δ2. **α.** Έχουμε $f'(x)=\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων $1,\sqrt{x^2+1}$ ($u=x^2+1>0$ παραγωγίσιμη, άρα $\sqrt{u}$ παραγωγίσιμη) με

$$f''(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=-\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=-\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} .$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow-\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=0\Leftrightarrow x=0 .$$

Επειδή $-\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε έχουμε : Για $x\in(-\infty,0)$,$f''(x)>0$ άρα η f κυρτή στο διάστημα $(-\infty,0]$, για $x\in(0,+\infty)$, $f''(x)<0$ άρα η f κοίλη στο διάστημα $[0,+\infty)$ και εφόσον $f''(0)=0$ η f παρουσιάζει σημείο καμπής , για $x=0$, $f(0)=0$, το $O(0,0)$.

β. Βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο καμπής $O(0,0)$.

Είναι $f(0)=0$, $f'(0)=1$, οπότε $\varepsilon: y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x$.

Στο διάστημα $[0,1]\subseteq[0,+\infty)$ η f είναι κοίλη οπότε η ε βρίσκεται πάνω από την C_f , εκτός του σημείου επαφής, δηλαδή $f(x)\le x$ για $x\in[0,1]$. Αν E είναι το ζητούμενο εμβαδόν τότε θα έχουμε: $E=\int_0^1(x-f(x))dx=\int_0^1 xdx-\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xdx-\int_0^1(x')f(x)dx=$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\left(\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx\right)=\frac{1}{2}-\left[1f(1)-0f(0)\right]+\int_0^1 x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}-f(1)+\int_0^1\frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}dx==\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\int_0^1\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx=\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}-1\Rightarrow\ E=\left(\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{1}{2}\right)\text{τ.μ.}$$

Δ3. Θέτουμε $u=F(x)=\int_0^x f^2(t)dt$. Η $f(t)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη άρα $f^2(t)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε $D_F=\mathbb{R}$ και F αρχική της $f^2(t)$ στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής με $F'(x)=f^2(x)$.

Είναι :

- $\lim\limits_{x\to0^+}u=\lim\limits_{x\to0^+}\int_0^x f^2(t)dt=0=F(0)$
- $\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)=e^0-1=0$.
- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=0$.

Θέτουμε $w=|f(x)|>0$ άρα $\lim\limits_{x\to0^+}w=\lim\limits_{x\to0^+}|f(x)|=0$. Οπότε $\lim\limits_{x\to0^+}\ln|f(x)|=\lim\limits_{x\to0^+}\ln w=-\infty$.
Δηλαδή το όριο L παρουσιάζει απροσδιοριστία της μορφής $0\cdot(-\infty)$.

Είναι $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε με $x>0$ έχουμε $f(x)>f(0)=0$ άρα $|f(x)|=f(x)$. Άρα το όριο γράφεται:

$$L=\lim_{x\to 0^+}\left(e^{F(x)}-1\right)\ln f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^{F(x)}-1}{x}\left(x\cdot\ln f(x)\right)\right].$$

Είναι $\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^{F(x)}-1}{x}\right]\underset{D.L.H.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\left(e^{F(x)}\cdot F'(x)\right)=e^0\cdot F'(0)=f^2(0)=0$ και

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot\ln f(x)\right)\overset{0\cdot\infty}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{x}}\underset{D.L.H.}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2f'(x)}{f(x)}=-\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{x^2}{f(x)}f'(x)\right].(\mathbf{1})$$

Είναι $\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{x^2}{f(x)}\right]\underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{f'(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}=\lim_{x\to 0^+}\left(2x\cdot\sqrt{x^2+1}\right)=0$ (**2**)

Οπότε από τις (1) και (2) έχουμε $\lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot\ln f(x)\right)=0\cdot f'(0)=0\cdot 1=0$.

Τελικά $L=0\cdot 0=0$.

Δ4. Η αρχική εξίσωση ορίζεται στο $(2,3)$ και ισοδύναμα γράφεται :

$$(x-2)\left(1-3\int_0^{x-2}f(t^2)dt\right)+(x-3)\left(8-3\int_0^{x}f^2(t)dt\right)=0.$$

Θέτουμε $h(x)=(x-2)\left(1-3\int_0^{x-2}f(t^2)dt\right)+(x-3)\left(8-3\int_0^{x}f^2(t)dt\right)$ που ορίζεται για $x\in[2,3]$ διότι :

- Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και f^2 συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε $\int_0^{x^2}f^2(t)dt$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής.
- Η $f(t^2)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, άρα η $\int_0^{x}f(t^2)dt$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $x-2$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα η $\int_0^{x-2}f(t^2)dt$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε και συνεχής.
- Οι $x-2$, $x-3$ συνεχείς στο $\mathbb{R}$ ως πολυώνυμα.

Επομένως η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[2,3]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Για $x=2$ έχουμε $h(2)=3\int_0^{2}f^2(t)dt-8=-\left(8-3\int_0^{2}f^2(t)dt\right)$ (**1**)

Για $x=3$ έχουμε $h(3)=1-3\int_0^{1}f(t^2)dt$ (**2**).

Από το ερώτημα **Δ2** έχουμε ότι η f είναι κοίλη στο διάστημα $[0,+\infty)$ άρα $f(x)\le x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

Οπότε $f(t)\le t$ και $f(t)\ge 0$ με $t\in[0,+\infty)$ άρα $f^2(t)\le t^2$, με το ίσον να ισχύει μόνο για $t=0$,

Άρα $\int_0^2 f^2(t)dt<\int_0^2 t^2dt\Rightarrow\int_0^2 f^2(t)dt<\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2\Rightarrow\int_0^2 f^2(t)dt<\frac{8}{3}\Leftrightarrow 8-3\int_0^2 f^2(t)dt>0\overset{(1)}{\Rightarrow}h(2)<0$ (**3**).

Όμοια $\int_0^1 f(t^2)dt<\int_0^1 t^2dt\Leftrightarrow\int_0^1 f(t^2)dt<\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1\Rightarrow\int_0^1 f(t^2)dt<\frac{1}{3}\Leftrightarrow 1-3\int_0^1 f(t^2)dt>0\overset{(2)}{\Rightarrow}h(3)>0$ (**4**).

Άρα h συνεχής στο $[2,3]$ και $h(2)\cdot h(3)<0$ (από τις σχέσεις (**3**) και (**4**)). Επομένως από το Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $h(x)=0$, άρα και η ζητούμενη , έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(2,3)$.

Σχολιασμός Θεμάτων

Το **Β' θέμα** εξετάζει στοιχειώδεις έννοιες του κεφαλαίου των μιγαδικών αριθμών.

Το **Γ' θέμα** απαιτεί πολύ καλή γνώση της θεωρίας και είναι απαραίτητες οι αιτιολογήσεις σε κάθε ερώτημά του.

Το **Δ' θέμα** , απαιτητικό , εξετάζει θεμελιώδη θεωρήματα της ύλης σε υπερβολικό βαθμό.

Ο υπολογισμός του ορίου απαιτούσε, πολλές πράξεις και ιδιαίτερες τεχνικές.

Τα θέματα χαρακτηρίζονται δυσκολότερα από τα περσινά.

Τομέας Μαθηματικών "ρούλα μακρή"