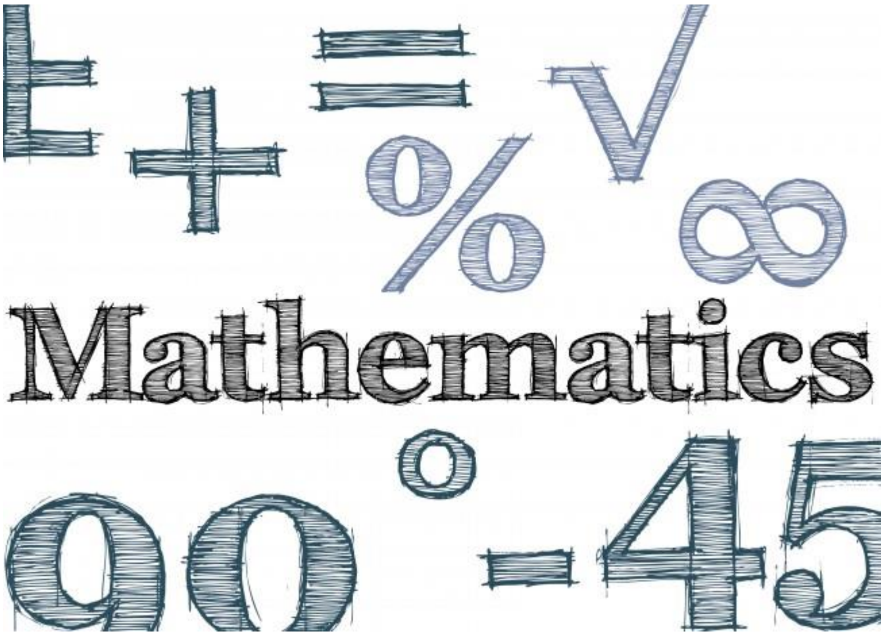
ΠΡΟΤΥΠΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ
ρούλα μακρή

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2015



Τομέας Μαθηματικών "ρούλα μακρή"

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
Πρότυπου Εκπαιδευτικού Οργανισμού
"ρούλα μακρή"
20 Μαΐου 2015

ΘΕΜΑ Α

Α1) Απόδειξη σελίδα 31 σχολικού βιβλίου
Α2) Ορισμός σελίδα 22 σχολικού βιβλίου
Α3) Ορισμός σελίδα 86- 87 σχολικού βιβλίου
Α4)
α) Λ (σελίδα 40 σχολικού βιβλίου)
β) Σ (σελίδα 14 σχολικού βιβλίου)
γ) Λ (σελίδα 95 σχολικού βιβλίου)
δ) Λ (σελίδα 97 σχολικού βιβλίου)
ε) Σ (σελίδα 141 σχολικού βιβλίου)

ΘΕΜΑ Β

Β1 . Λύνουμε την εξίσωση

$$(3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow 3x-1=0 \text{ ή } 8x^2-6x+1=0$$

$$3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

$$8x^2-6x+1=0 \quad \Delta=4 \text{ και } x_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{4}}{2\cdot 8}=\frac{6\pm 2}{16}=\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Είναι $(A\cap B)\subseteq A\subseteq(A\cup B)$, άρα $P(A\cap B)\le P(A)\le P(A\cup B)$, οπότε αφού είναι $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$ θα είναι $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $P(A)=\frac{1}{3}$ και $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

Ακόμα είναι

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

Για το $P(\Gamma)$ λύνουμε την εξίσωση

$$9x^2-3x-2=0 \quad \Delta=81 \text{ και } x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{81}}{2\cdot 9}=\frac{3\pm 9}{18}=\begin{cases} x=\frac{12}{18}=\frac{2}{3} \\ x=\frac{-6}{18}=-\frac{1}{3}<0 \end{cases}$$

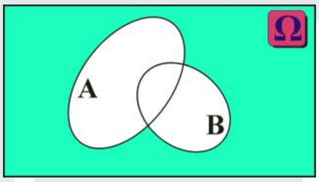
Η δεύτερη λύση απορρίπτεται γιατί $0\le P(\Gamma)\le 1$.

Άρα είναι $P(\Gamma)=\dfrac{2}{3}$

B2.

$$P(A'-B')=P(A')-P(A'\cap B')=1-P(A)-P\left[(A\cup B)'\right]=1-P(A)-1+P(A\cup B)=P(A\cup B)-P(A)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$



Είναι $\Delta=(A\cap B)'$. Άρα $P(\Delta)=P\left[(A\cap B)'\right]=1-P(A\cap B)=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$.

Εναλλακτικά είναι

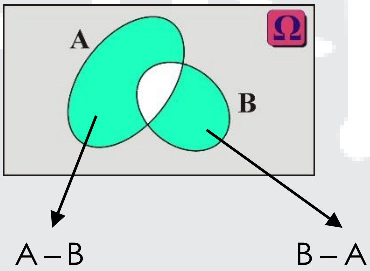
$$P(A'-B')=(A'\cap(B')')=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{5}{12}-\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$$

B3.

Είναι $E=(A-B)\cup(B-A)$ και $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$ οπότε

$$P(E)=P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(B\cap A)=$$

$$=P(A)+P(B)-2P(B\cap A)=\frac{1}{3}+\frac{5}{12}-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$



B4. Έστω $B\cap\Gamma=\varnothing$. Από τον απλό προσθετικό νόμο είναι

$P(B\cup\Gamma)=P(B)+P(\Gamma)=\dfrac{5}{12}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{13}{12}>1$, άτοπο , γιατί $0\le P(B\cup\Gamma)\le 1$.

Άρα δεν είναι ασυμβίβαστα .

ΘΕΜΑ Γ

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές	f_i%
[8,10)	9	10
[10,12)	11	10
[12,14)	13	30
[14,16)	15	20
[16,18)	17	30

Γ1 . Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10%, άρα $f_1\% = 10\%$.

Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30%, άρα $f_5\% = 30\%$.

Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην 3η κλάση είναι 108^0, άρα $a_3 = 360^0 \cdot f_3 \Leftrightarrow f_3 = \frac{108^0}{360^0} = 0,3$, δηλαδή $f_3\% = 30\%$.

Έχουμε ότι $f_4 = 1 - f_1 - f_2 - f_3 - f_5 = 1 - 0,1 - f_2 - 0,3 - 0,3 = 0,3 - f_2$.

Τα κέντρα των κλάσεων είναι: $x_1 = 9, x_2 = 11, x_3 = 13, x_4 = 15, x_5 = 17$.

Επομένως, $\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i \Leftrightarrow 14 = 9\cdot 0,1 + 11\cdot f_2 + 13\cdot 0,3 + 15(0,3 - f_2) + 17\cdot 0,3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 14 = 0,9 + 11 f_2 + 3,9 + 4,5 - 15 f_2 + 5,1 \Leftrightarrow 4 f_2 = 0,4 \Leftrightarrow f_2 = 0,1$

και $f_4 = 0,3 - 0,1 = 0,2$

Επομένως, $f_2\% = 10\%$ και $f_4\% = 20\%$.

Γ2 . Είναι $CV = \frac{s}{\bar{x}}$ με $\bar{x} = 14$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot \nu_i}{\nu} = \sum_{i=1}^{5}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot \frac{\nu_i}{\nu} = \sum_{i=1}^{5}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot f_i =$$

$$= (9-14)^2 \cdot 0,1 + (11-14)^2 \cdot 0,1 + (13-14)^2 \cdot 0,3 + (15-14)^2 \cdot 0,2 + (17-14)^2 \cdot 0,3 =$$
$$= 6,6$$

Είναι $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{6,6}}{14} = 0,18 > 0,1$ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

Γ3 . Είναι

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \nu_i}{\nu} \Leftrightarrow 14 = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i + x_5 \cdot \nu_5}{\nu} \Leftrightarrow 14\nu = 1780 + 17 \cdot f_5 \cdot \nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14\nu = 1780 + 17 \cdot 0,3 \cdot \nu \Leftrightarrow 14\nu = 1780 + 5,1 \cdot \nu \Leftrightarrow 8,9\nu = 1780 \Leftrightarrow \nu = 200$$

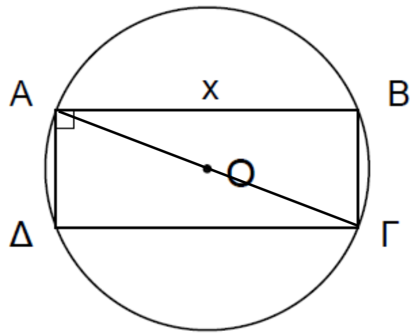
Γ4 .

Είναι $\beta_i = \dfrac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{S_a} = \dfrac{\alpha_i}{S_a} - \dfrac{\bar{\alpha}}{S_a} = \dfrac{1}{S_a} \cdot \alpha_i - \dfrac{\bar{\alpha}}{S_a}$

Από εφαρμογή σελίδα 99 είναι $\bar{\beta} = \dfrac{1}{S_\alpha} \cdot \bar{\alpha} - \dfrac{\bar{\alpha}}{S_\alpha} = 0$ και $S_\beta = \left|\dfrac{1}{S_\alpha}\right| \cdot S_\alpha = \dfrac{1}{S_\alpha} \cdot S_\alpha = 1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Φέρνουμε τη διαγώνιο ΑΓ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ που είναι διάμετρος του κύκλου γιατί η γωνία ΑΔΓ=90^0 και είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο . Άρα είναι (ΑΓ)=2ρ=10



ΣΧΗΜΑ Ι

.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ είναι

$$(\text{ΑΔ}) = \sqrt{(\text{ΑΓ})^2 - (\text{ΔΓ})^2} = \sqrt{(2\rho)^2 - x^2} = \sqrt{100 - x^2}$$

Άρα το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΔΓ}) \cdot (\text{ΑΔ})$ και ως συνάρτηση του x γράφεται $f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}, 0 < x < 10$

Δ2. Είναι

$$f'(x) = \left(x \cdot \sqrt{100 - x^2}\right)' = \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{\left(100 - x^2\right)'}{2\sqrt{100 - x^2}} = \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{100 - x^2}^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{2\left(50 - x^2\right)}{\sqrt{100 - x^2}}$$

και

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{100 - x^2}}\left(50 - x^2\right) = 0 \Leftrightarrow 50 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2} \text{ γιατί}$$

$0 < x < 10$

Για

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{100-x^2}}\left(50-x^2\right)>0 \Leftrightarrow 50-x^2>0 \text{ με } x\in(0,10) \Leftrightarrow 0<x<5\sqrt{2}.$$

και $f'(x)<0 \Leftrightarrow 5\sqrt{2}<x<10$

x	0 $\quad$ $5\sqrt{2}$ $\quad$ 10
$f'(x)$	+ $\quad$ 0 $\quad$ -
f	↗ $\quad$ ↘

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=5\sqrt{2}$ για το οποίο $(\text{ΑΔ})=\sqrt{100-\left(5\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{100-50}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}=x=(\text{ΑΒ})$ και επομένως το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο

Δ3. Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98\cdot x}=\frac{1}{98}\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\frac{1}{98}\cdot f'(1)$$ από τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης στο $x_0=1$

Άρα είναι $\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98\cdot x}=\frac{1}{98}\cdot f'(1)=\frac{1}{98}\cdot\frac{2\cdot 49}{\sqrt{99}}=\frac{1}{3\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{11}}{33}$

Δ.4 Είναι $A-B\subseteq A \Rightarrow 0<P(A-B)\le P(A)\le 1<5\sqrt{2}$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,5\sqrt{2}\right]$ άρα $f\left(P(A-B)\right)\le f\left(P(A)\right)$ και $f(x)>0$.

$$f\left(P(A-B)\right)\le f\left(P(A)\right)\Leftrightarrow \frac{1}{f\left(P(A)\right)}\le\frac{1}{f\left(P(A-B)\right)}\Leftrightarrow \frac{P(A)\cdot P(A-B)}{f\left(P(A)\right)}\le\frac{P(A)\cdot P(A-B)}{f\left(P(A-B)\right)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A)\cdot P(A-B)}{P(A)\sqrt{100-P^2(A)}}\le\frac{P(A)\cdot P(A-B)}{P(A-B)\sqrt{100-P^2(A-B)}}\Leftrightarrow \frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\le\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} \qquad (1)$$

Είναι

$$0<P(A)\le 1\Leftrightarrow 0<P^2(A)\le 1\Leftrightarrow 0>-P^2(A)\ge -1\Leftrightarrow 100>100-P^2(A)\ge 99\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10>\sqrt{100-P^2(A)}\ge\sqrt{99}\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{99}}\ge\frac{1}{\sqrt{100-P^2(A)}}>\frac{1}{10}\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{99}}\ge\frac{1}{\sqrt{100-P^2(A)}}>0$$

Είναι $\frac{1}{\sqrt{99}}\ge\frac{1}{\sqrt{100-P^2(A)}}>0$ και $1\ge P(A-B)>0$ και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη θα έχουμε $5\sqrt{2}>\frac{1}{\sqrt{99}}\ge\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}>0$ και όμοια

$$5\sqrt{2}>\frac{1}{\sqrt{99}}\ge\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}>0$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,5\sqrt{2}\right]$ και λόγω της (1) θα είναι

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right)\le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$$

Σχολιασμός Θεμάτων

Τα θέματα χαρακτηρίζονται πιο απαιτητικά από αυτά του 2014 . Απαιτούσαν ευχέρεια αλγεβρικών πράξεων και γνώσεις ανισοτήτων από την Α΄ Λυκείου.

Τομέας Μαθηματικών
"ρούλα μακρή"