ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέμα 1ο

Α. α) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $f'(x)=-\eta\mu x$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

β) Έστω οι συναρτήσεις f,g συνεχείς σε ένα διάστημα Δ για τις οποίες ισχύει: $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε να ισχύει: $f(x)=g(x)+c$ για κάθε $x\in\Delta$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

γ) Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Να δώσετε τον ορισμό : Πότε η f παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό ελάχιστο. **ΜΟΝΑΔΕΣ 3**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος**.

α) Αν μια συνάρτηση $f:A\to R$ έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Α.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0)>0$, τότε $f(x)>0$ για τις τιμές του x κοντά στο x_0.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$ τότε, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f'(x_0)>0$.

δ) Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι κυρτή στο διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη σε αυτό. Τότε ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

ε) Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq 0$ και ισχύει $\int_a^\beta f(x)dx>0$, τότε υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιος ώστε $f(x_0)>0$.

στ) Αν η συνεχής συνάρτηση f δεν είναι παντού ίση με μηδέν στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $\int_a^\beta f(x)dx=0$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές.

ΜΟΝΑΔΕΣ 9

Θέμα 2ο

Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{\ln\left(ax\right)}{\sqrt{x}}, a>0$.

Α. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f\left(1\right))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $x-y=0$, να βρείτε την τιμή του α.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Β. Για $a=1$:

α) Να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα της f.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών και τις ασύμπτωτες .

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

γ) Να αποδείξετε: ότι $\left(\sqrt{\kappa}\right)^{\sqrt{\kappa+1}}>\left(\sqrt{\kappa+1}\right)^{\sqrt{\kappa}}$ για κάθε θετικό ακέραιο $\kappa\geq 8$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Θέμα 3ο

Δίνονται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\left[\alpha,\beta\right]$ με $0<\alpha<\beta$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z=a+\beta i$ και $w=f(\alpha)+i\cdot f(\beta)$ με $f\left(\beta\right)\neq 0$.

Α. Να αποδείξετε ότι:

α) Ο αριθμός $z_1=\dfrac{1+\beta-i\cdot\bar{z}}{1+f\left(\beta\right)-i\cdot\bar{w}}$ είναι πραγματικός αν και μόνο αν $f\left(a\right)=a$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β) Αν $z=-iw$ τότε οι εικόνες των z,w στο μιγαδικό επίπεδο και η αρχή 0 των αξόνων, είναι κορυφές ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Β. Έστω ότι ισχύει $\left|z-iw\right|^2=\left|z\right|^2+\left|iw\right|^2$. Να αποδείξετε ότι:

α) $a\cdot f\left(\beta\right)-\beta\cdot f\left(\alpha\right)=0$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

β) Οι εικόνες των z,w και η αρχή 0 είναι συνευθειακά σημεία.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

γ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(a,\beta\right)$ τέτοιο ώστε, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ να διέρχεται από το σημείο 0(0,0).

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f''(x)$ συνεχή στο **R** τέτοια ώστε να ισχύουν:

$$\int_0^x \left(t^2+1\right)\cdot f''(t)\,dt = 2\int_x^0 t\cdot f'(t)\,dt - 4\int_0^1 x\cdot t\cdot f(x)\,dt \text{ για κάθε } x\in R \text{, με}$$

$$f(0)=0 \text{ και } f'(0)=2 .$$

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της είναι $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}, x\in R$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

β) Έστω $E(a)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=0$ και $x=a>0$.

Αν το a μεταβάλλεται με ρυθμό $\dfrac{10}{3}cm/\sec$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(a)$, τη χρονική στιγμή κατά την οποία $a=3cm$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

γ) Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση g για την οποία ισχύει:

$$\left|g(x)+x-2\right|\le\left|f(x)\right| \text{ για κάθε } x\in R .$$

(i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=-x+2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g όταν $x\to+\infty$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

(ii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, την πλάγια ασύμπτωτη της στο $+\infty$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$, να αποδείξετε ότι: $E\le\ln 5$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΤΙΣ ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ