

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2004

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Δες σχολικό βιβλίο, σελίδα 194: Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

B. $I_1 > 0$ Δες σχόλιο σελίδα 346.

$I_2 = f(3) - f(0) < 0$ γιατί $f(3) < f(0)$

$I_3 = f'(3) - f'(0) < 0$ γιατί η κλίση της C_f στο $(3, f(3))$ είναι αρνητική και στο $(0, f(0))$ είναι θετική.

Γ. 1→γ

2→β

3→α

4→δ

Δ. Δες σχολικό βιβλίο, σελίδα 224 στίχοι 1 έως 8.

ΘΕΜΑ 2ο

Έχουμε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 2) = 0$ (1) και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x - 2) = 0$ (2)

α. i) Το κλάσμα $\frac{g'(x)}{f'(x) - 1}$ ορίζεται σε διάστημα Δ της μορφής $(\alpha, +\infty)$, αφού $f'(x) \neq 1$. Στο Δ είναι

$$\frac{(g(x) + 2)'}{(f(x) - x - 2)'} = \frac{g'(x)}{f'(x) - 1}$$

Ακόμα: $f'(x) - g'(x) = 1 \Leftrightarrow g'(x) = f'(x) - 1$, οπότε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g'(x)}{f'(x) - 1} = 1$.

Από το πρώτο θεώρημα του De l'Hospital προκύπτει:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 2}{f(x) - x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(g(x) + 2)'}{(f(x) - x - 2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g'(x)}{f'(x) - 1} = 1.$$

ii) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 2) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -2$, άρα η C_g έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = -2$.

Πάλι, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x - 2) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$, άρα η C_f έχει στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = x + 2$

β) Έστω ότι η g έχει δύο διαφορετικές ρίζες ρ_1, ρ_2 στο \mathbb{R} με $\rho_1 < \rho_2$. (απόδειξη με άτοπο)

Εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle για την g στο $[\rho_1, \rho_2]$ γιατί, ως παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}

- η g είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , και ακόμα
- $g(\rho_1) = g(\rho_2) = 0$.

Επομένως, υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0$. Τότε: $f'(\xi) - g'(\xi) = 1 \Leftrightarrow f'(\xi) = 1$. Άτοπο, γιατί $f'(x) \neq 1$. Έτσι, η g έχει το πολύ μια ρίζα στο \mathbb{R} .

γ) Έχουμε $f'(x) - g'(x) = x \Leftrightarrow (f(x) - g(x))' = (x)'$, άρα, από τις συνέπειες του Θ. Μ. Τ. του διαφορικού λογισμού, υπάρχει αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $f(x) - g(x) = x + c$ (1) ή

$$f(x) - x - 2 = g(x) + 2 + c - 4. \quad (2)$$

Επειδή υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x - 2) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(g(x) + 2) + c - 4] = 0 + c - 4$, από την (2)

είναι ίσα. Προκύπτει, επομένως: $0 = c - 4$ ή $c = 4$. Άρα, είναι: $f(x) - g(x) = x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

[Στην (1) καταλήγουμε και με ολοκλήρωση των δύο μελών της $f'(x) - g'(x) = x$]

ΘΕΜΑ 3ο

A. i) Επειδή, προφανώς, η $f(t) = \frac{2}{a+e^t}$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} , η g παραγωγίζεται στο \mathbb{R} με

$$g'(x) = \frac{2}{a+e^x} > 0, \text{ επομένως, η } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα και σαν τέτοια είναι 1-1 και αντιστρέφεται.}$$

ii) Η C_g είναι το σύνολο των σημείων $(x, g(x))$ με $x \in \mathbb{R}$, άρα η C_g^{-1} είναι το σύνολο των σημείων $(g(x), x)$ και σ' αυτήν ανήκουν οι εικόνες $M(g(x), x)$ του $z = g(x)+xi, x \in \mathbb{R}$

B. α) Έχουμε κατά σειρά

$$\begin{aligned} |\bar{z}+i| \leq |z-1| &\Leftrightarrow |g(x)-xi+i| \leq |g(x)+xi-1| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{g^2(x)+(1-x)^2} \leq \sqrt{(g(x)-1)^2+x^2} \\ &\Leftrightarrow \dots -2x \leq -2g(x) \Leftrightarrow g(x) \leq x \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Im}(z), x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

β) Θεωρούμε την συνάρτηση: $h(x) = g(x) - x, x \in \mathbb{R}$.

Από το Bα είναι $g(x) \leq x \Leftrightarrow g(x) - x \leq 0 \Leftrightarrow h(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ακόμα, $g(0) = \int_0^0 \frac{2}{a+e^t} dx = 0 \Leftrightarrow h(0) = 0$, έτσι η h έχει ακρότατο (ολικό μέγιστο) για $x=0$.

$$\text{Είναι } h'(x) = g'(x) - 1 = \frac{2}{a+e^x} - 1, x \in \mathbb{R}$$

Επειδή το $x=0$ είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της h και η h παραγωγίζεται σ' αυτό, από το θεώρημα του Fermat προκύπτει: $h'(0) = 0$ ή ισοδύναμα $\frac{2}{a+e^0} - 1 = 0 \Leftrightarrow a=1$.

γ. Επειδή η g παραγωγίζεται στο \mathbb{R} θα είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$. Από το Θ.Μ.Τ του διαφορικού λογισμού, υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ με

$$\begin{aligned} \frac{g(2) - g(1)}{2 - 1} &= g'(\xi) \quad \text{ή} \\ \int_0^2 \frac{2}{a+e^t} dt - \int_0^1 \frac{2}{a+e^t} dt &= \frac{2}{a+e^\xi} \quad \text{ή} \\ \int_0^2 \frac{1}{a+e^t} dt - \int_0^1 \frac{1}{a+e^t} dt &= \frac{1}{a+e^\xi} \quad (1) \end{aligned}$$

Επειδή $\xi \in (1, 2)$ είναι διαδοχικά:

$$1 < \xi < 2 \quad \text{ή}$$

$$e < e^\xi < e^2 \quad [e^x \text{ γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}] \quad \text{ή}$$

$$1+e < 1+e^\xi < 1+e^2 \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{1+e^2} < \frac{1}{1+e^\xi} < \frac{1}{1+e} \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{1+e^2} < \frac{1}{a+e^\xi} < \frac{1}{1+e} \quad [a=1]$$

και η (1) δίνει το ζητούμενο:

$$\frac{1}{1+e^2} < \int_0^2 \frac{1}{a+e^t} dt - \int_0^1 \frac{1}{a+e^t} dt < \frac{1}{1+e}$$

ΘΕΜΑ 4ο

- α) i)** Είναι $f^2(x) + g^2(x) = 1$ (1), $x \in \mathbb{R}$
 και $f'(x) = g^2(x) \neq 0$ (2), $x \in \mathbb{R}$

οπότε:

$$\begin{aligned} (f^2(x) + g^2(x))' &= 0 \\ \text{ή} \quad 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) &= 0 \\ \text{ή} \quad 2f(x)g^2(x) + 2g(x)g'(x) &= 0 \end{aligned}$$

και επειδή $g(x) \neq 0$ είναι $f(x)g(x) + g'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = -f(x)g(x)$, $x \in \mathbb{R}$

- ii)** Επειδή η g δεν μηδενίζεται και είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο \mathbb{R} . Είναι $g(0) = 1 > 0$, άρα:

$$g(x) > 0 \quad (3), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , γιατί από την (2): $f'(x) = g^2(x) > 0$.

Από την (1): $f^2(0) + g^2(0) = 1 \Leftrightarrow f^2(0) + 1 = 1 \Leftrightarrow f(0) = 0$. (4)

Έτσι,

- για $x < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$
- για $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$

Η $g'(x) = -g(x)f(x)$, λόγω της (3), έχει για κάθε $x \neq 0$ αντίθετο πρόσημο της $f(x)$, που σημαίνει ότι

- για $x < 0$ είναι $f(x) < 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$ και
- για $x > 0$ είναι $f(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0$

Άρα, η g , ως συνεχής στο $x_0=0$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και έχει ακρότατο (ολικό μέγιστο) το $g(0) = 1$, το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

- β) i)** Λόγω της (3) ισχύει η ισοδυναμία:

$$g(x_1) < g(x_2) \Leftrightarrow g^2(x_1) < g^2(x_2) \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(x_2), \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

που σημαίνει, τελικά, ότι η f' έχει ίδια μονοτονία με την g . Επομένως, η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $(0, f(0)) = (0, 0)$.

Άλλος τρόπος. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη, είναι παραγωγίσιμη και η g^2 , άρα από την (2) και η f' , που σημαίνει ότι υπάρχει η f'' . Τότε:

$f''(x) = (f'(x))' = (g^2(x))' = 2g(x)g'(x)$ έτσι, από την (3), η $f''(x)$ για κάθε $x \neq 0$ έχει ίδιο πρόσημο με την $g'(x)$:

- για $x < 0$ είναι $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0$ και
- για $x > 0$ είναι $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0$

Επειδή η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ προκύπτει, ότι είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $(0, f(0)) = (0, 0)$.

- ii)** Η ζητούμενη εξίσωση είναι $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ ή $y = f'(0) \cdot x$ ή $y = x$ αφού από την (2) έπεται $f'(0) = 1$.

γ. Επειδή η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$, τα σημεία της C_f είναι κάτω από τα σημεία της εφαπτομένης της $y = x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, επομένως: $x \geq f(x) \Leftrightarrow x - f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$

$$\text{Είναι } E = \int_0^1 |x - f(x)| dx = \int_0^1 (x - f(x)) dx \stackrel{(α)}{=} \int_0^1 \left(x + \frac{g'(x)}{g(x)} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \ln |g(x)| \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \ln |g(1)| - \frac{0}{2} - \ln |g(0)|$$

$$= \frac{1}{2} + \ln |g(1)| - \ln 1 = \frac{1}{2} + \ln |g(1)|. \quad [\text{γιατί } g(1) > 1 \text{ από την (3)}]$$