

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1^ο

A. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 151

B. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 85

Γ. 1. $n_i = f_i \% \Rightarrow n_i = \frac{n_i}{n} \cdot 100 \Rightarrow 1 = \frac{100}{n} \Rightarrow n = 100$

2. Ξέρουμε (σχολικό βιβλίο, σελίδα 96) ότι $CV = \frac{s}{\bar{x}}$. Όμως

$$\bar{x} = \frac{(-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3}{7} = \frac{0}{7} = 0.$$

Επομένως ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν ορίζεται.

3. Από την εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, σελίδα 99,

προκύπτει: $\bar{x}' = a \cdot \bar{x} + b$, $s' = |a| \cdot s$.

4. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 70: $a_i = n_i \frac{360^\circ}{n} = 360 \cdot f_i$

Δ. Η ζητούμενη μέση επίδοση είναι ο ακόλουθος σταθμικός μέσος:

$$\frac{16 \cdot 8 + 15 \cdot 1,3 + 17 \cdot 0,7}{8 + 1,3 + 0,7} = \frac{128 + 19,5 + 11,9}{10} = \frac{159,4}{10} = 15,94$$

E. Ξέρουμε (σχολικό βιβλίο, σελίδες 27, 28) ότι, αν u η ταχύτητα και a η επιτάχυνση του κινητού, τότε $u(t) = x'(t)$ και $a(t) = u'(t) = x''(t)$. Άρα,

στη συγκεκριμένη περίπτωση, θα είναι: $u(t) = x'(t) = -t^2 - t - 1$ και

$a(t) = x''(t) = u'(t) = -2t - 1$ και επειδή $t \geq 0$, θα είναι $a(t) < 0$. Επομένως, η ταχύτητα του φορτηγού μειώνεται.

ΖΗΤΗΜΑ 2^ο

1. Έστω x, y οι δύο ζητούμενες (εκατοστιαίες) σχετικές συχνότητες των κλάσεων $[4,6)$ και $[16,18)$ αντίστοιχα. Ξέρουμε ότι $\sum f_i \% = 100$ και παρατηρούμε ότι το άθροισμα των δοσμένων σχετικών συχνοτήτων είναι 85. Άρα θα ισχύει $x + y = 100 - 85 = 15$. Εξάλλου, από υπόθεση, έχουμε ότι $y = 4x$. Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $x = 3$, $y = 12$. Άρα οι ζητούμενες σχετικές συχνότητες είναι 3% και 12% αντίστοιχα.

2. Αθροίζοντας τις δοσμένες σχετικές συχνότητες του πίνακα, βλέπουμε ότι βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 10 έχει πάρει το $(16+14+13+12+5)\% = 60\%$ των υποψηφίων. Από υπόθεση, αυτό το ποσοστό αντιστοιχεί σε πλήθος 55872 ατόμων. Άρα, το ζητούμενο συνολικό πλήθος των υποψηφίων θα είναι: $55872 \frac{100}{60} = 93120$ υποψήφιοι.

3. Από τον πίνακα βλέπουμε ότι, βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 11 και μικρότερο του 13, έχει πάρει το $(\frac{16}{2} + \frac{14}{2})\% = 15\%$ των υποψηφίων. Άρα, το ζητούμενο πλήθος είναι το 15% του συνόλου, δηλαδή $\frac{15}{100} \cdot 93120 = 13968$ υποψήφιοι.

4. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A: «ο υποψήφιος είναι της θεωρητικής κατεύθυνσης», B: «ο υποψήφιος είναι της θετικής κατεύθυνσης» και T: «ο υποψήφιος είναι της τεχνολογικής κατεύθυνσης». Αναζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής προέρχεται, είτε από τη θεωρητική, είτε από την τεχνολογική κατεύθυνση», δηλαδή την $P(A \cup T)$. Από υπόθεση είναι $P(A) = 0,34$ και $P(T) = 2P(B)$. Εξάλλου, γνωρίζουμε ότι $P(A) + P(B) + P(T) = 1$. Άρα έχουμε:

$$0,34 + P(B) + 2P(B) = 1 \Leftrightarrow 3P(B) = 0,66 \Leftrightarrow P(B) = \frac{0,66}{3} \Leftrightarrow P(B) = 0,22$$

Επομένως είναι $P(T) = 2P(B) = 0,44$. Τα ενδεχόμενα A και T είναι ασυμβίβαστα, αφού κάθε μαθητής μπορεί να έχει επιλέξει μόνο μία κατεύθυνση σπουδών. Με εφαρμογή του απλού προσθετικού νόμου, έχουμε: $P(A \cup T) = P(A) + P(T) = 0,34 + 0,44 = 0,78$. Το πλήθος των υποψηφίων της θετικής κατεύθυνσης είναι $0,22 \cdot 93120 = 20486,4 \approx 20486$ υποψήφιοι.

ΖΗΤΗΜΑ 3^ο

1. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα K: «το νόμισμα έφερε κεφάλι» και Γ: «το νόμισμα έφερε γράμματα». Με δεντροδιάγραμμα, βρίσκουμε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος τύχης: $\Omega = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$. Το ενδεχόμενο A: «να φέρουμε τουλάχιστον μία φορά κεφάλι» είναι το $A = \{KK, K\Gamma, \Gamma K\}$. Άρα, για την πιθανότητα να συμβεί το A, έχουμε: $\frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{4}$

2. Κατ' αρχάς, αντικαθιστούμε στον πίνακα (στις τιμές της μεταβλητής y_i) τις τιμές των $P(A) = 3/4$, $P(A') = 1 - 3/4 = 1/4$ και $P(\Omega) = 1$ οπότε ο πίνακας συχνοτήτων γίνεται:

Τιμές μεταβλητής y_i	Απόλυτες συχνότητες n_i
$\frac{3}{2}x^2$	3
$\frac{3}{4}x^2$	2
x	3

α. Από τον ορισμό της μέσης τιμής έχουμε:

$$\bar{y} = \frac{\frac{3}{2}x^2 \cdot 3 + \frac{3}{4}x^2 \cdot 2 + 3x}{8} = \frac{24x^2 + 3x}{8} = \frac{6x^2 + 3x}{8}$$

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{6x^2 + 3x}{8}} = \frac{8}{6x^2 + 3x}, x \in R - \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της (ως ρητή συνάρτηση) και η παράγωγός της δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x) = -8 \cdot \frac{12x+3}{(6x^2+3x)^2}$$

Τώρα έχουμε: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{12} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$ και

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -8 \cdot (12x+3) \geq 0 \Leftrightarrow 12x+3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{4}.$$

Άρα έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

x		$-1/2$	$-1/4$	0	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$		\nearrow	T.M	\searrow	\searrow

Επομένως, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, για $x = -\frac{1}{4}$, το

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{8}{6 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{8}{\frac{6}{16} - \frac{3}{4}} = \frac{8}{\frac{3}{8} - \frac{3}{4}} = \frac{8}{-\frac{3}{8}} = -\frac{64}{3}$$

ΖΗΤΗΜΑ 4^ο

- $f'(x) = [(P(A))^2 x^3 - (7P(A) - 3)x - x \ln x + P(B)]' =$
 $= 3 \cdot [P(A)]^2 x^2 - 7P(A) + 3 - \ln x - 1$
- Από υπόθεση έχουμε $f'(1) = 0$, οπότε προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση:
 $3 \cdot [P(A)]^2 - 7 \cdot P(A) + 2 = 0$. Έχουμε $\Delta = 25$ και, τελικά,

$$P(A) = \begin{cases} \frac{7+5}{6} = \frac{12}{6} = 2, \text{ απορ. αφού } 0 \leq P(A) \leq 1 \\ \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \text{ δεκτη τιμη} \end{cases} \quad \text{Άρα, τελικά, } P(A) = \frac{1}{3}.$$

- Για $P(A) = \frac{1}{3}$, ο τύπος της συνάρτησης γίνεται

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \left(\frac{7}{3} - 3\right)x - x \ln x + P(B) = \frac{1}{9}x^3 + \frac{2}{3}x - x \ln x + P(B), \text{ οπότε}$$

$$f(1) = \frac{1}{9} + \frac{2}{3} + P(B) \text{ (αφού } \ln 1 = 0). \text{ Όμως, από υπόθεση, } f(1) = \frac{55}{36}, \text{ άρα έχουμε:}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{2}{3} + P(B) = \frac{55}{36} \Leftrightarrow \frac{4}{36} + \frac{24}{36} + P(B) = \frac{55}{36} \Leftrightarrow P(B) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}.$$

Έστω ότι τα A, B

είναι ασυμβίβαστα. Τότε θα ισχύει $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{13}{12} > 1$, άτοπο, αφού $0 \leq P(A \cup B) \leq 1$. Άρα τα A, B δεν είναι ασυμβίβαστα.

$$4. \frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(A \cap B) \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq P(A), \text{ ισχυει αφου } A \cap B \subseteq A \\ \text{ΚΑΙ} \\ P(A \cap B) \geq \frac{1}{12} \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq \frac{1}{12} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{13}{12} - P(A \cup B) \geq \frac{1}{12} \Leftrightarrow P(A \cup B) \leq 1, \text{ που ισχυει} \end{array} \right.$$

ΘΕΜΑΤΑ 2003